Examen de fin d'études secondaires 2012 - Sections E, F, G - Mathématiques
Corrigé

I. 1) Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs (non colinéaires) du plan π.

Alors: $M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AC}\ \ (k, h \in \mathbf{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2k+3h \\ y-1=-4h \\ z+4=k-2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2k+3h & (1) \\ y=1-4h & (2) \\ z=-4+k-2h & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2k+3h & (1) \\ y=1-4h & (2) \\ x-2z=10+7h & (3)/(1)-2(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2k+3h & (1) \\ y=1-4h & (2) \\ 7y+4x-8z=47 & (3)/7(2)+4(3) \end{cases}$$

Donc: $\pi \equiv 4x+7y-8z-47=0$

2) $$\begin{cases} 2x-y+z=5 & (1) \\ -x+2y+2z=-1 & (2) \\ 5x-y+5z=14 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 & (1) \\ 3y+5z=3 & (2)/(1)+2(2) \\ -3y-5z=-3 & (3)/5(1)-2(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 & (1) \\ 3y+5z=3 & (2) \\ 3y+5z=3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 & (1) \\ 3y+5z=3 & (2) \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.
Posons $z=k$. avec $k \in \mathbf{R}$.

$(2): 3y=-5k+3 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}k+1$

$(1): 2x=-\frac{5}{3}k+1-k+5 \Leftrightarrow 2x=-\frac{8}{3}k+6 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}k+3$

$$S=\left\{\left(-\frac{4}{3}k+3;-\frac{5}{3}k+1;k\right) \middle| k \in \mathbf{R}\right\}$$

Interprétation géométrique:
Les trois plans ont comme intersection la droite passant par le point $A(3;1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}$.

II. 1) a) $C_8^4 \cdot C_{24}^2 = 70 \cdot 276 = 19320$ tirages

b) $C_{32}^6 - C_{28}^6 = 906192 - 376740 = 529452$ tirages

2) a) $B_6^2 = 6^2 = 36$ tirages

b) $A_8^2 + A_6^2 = 56 + 30 = 86$ tirages

III. 1) $f(x)=\dfrac{e^{3x}+1}{e^{3x}-2}$

C.E.: $e^{3x}-2\neq 0 \Leftrightarrow e^{3x}\neq 2 \Leftrightarrow e^{3x}\neq e^{\ln 2} \Leftrightarrow 3x\neq \ln 2 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\ln 2}{3}$

$\operatorname{Dom} f=\mathbf{R}-\left\{\dfrac{\ln 2}{3}\right\}$

$$f'(x)=\frac{3e^{3x}\cdot\left(e^{3x}-2\right)-\left(e^{3x}+1\right)\cdot 3e^{3x}}{\left(e^{3x}-2\right)^2}=\frac{3e^{3x}\cdot\left(e^{3x}-2-e^{3x}-1\right)}{\left(e^{3x}-2\right)^2}=\frac{-9e^{3x}}{\left(e^{3x}-2\right)^2}$$

2) $2\ln(x+3)-\ln(1-x)\leq \ln 2$

C.E.: $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

$D=\left]-3;1\right[$

On obtient: $2\ln(x+3)\leq \ln 2+\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(x+3)^2\leq \ln[2(1-x)]$

$\Leftrightarrow (x+3)^2\leq 2(1-x) \Leftrightarrow x^2+6x+9\leq 2-2x \Leftrightarrow x^2+8x+7\leq 0$

$\Delta=64-28=36$; $x_1=\dfrac{-8+6}{2}=-1$; $x_2=\dfrac{-8-6}{2}=-7$

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
x^2+8x+7		$+$	0	$-$	0	$+$	

$E=\left[-7;-1\right]$

$S=D\cap E=\left]-3;-1\right]$

IV. 1) $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{\overbrace{2x}^{u'(x)}}{\underbrace{x^2+1}_{u(x)}}\,dx=\ln\left|x^2+1\right|+k=\ln\left(x^2+1\right)+k\ \ (k\in\mathbf{R})$

2) $\displaystyle F(x)=\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\int\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{(\ln x)^3}_{[u(x)]^3}\,dx=\frac{\ln^4 x}{4}+k\ \ (k\in\mathbf{R})$

$F(e)=2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln^4 e}{4}+k=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}+k=2 \Leftrightarrow k=\dfrac{7}{4}$

Donc: $F(x)=\dfrac{\ln^4 x}{4}+\dfrac{7}{4}$

3) $\displaystyle\int_0^2\frac{3x-1}{\left(3x^2-2x+4\right)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2(3x-1)\left(3x^2-2x+4\right)^{-3}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^2\underbrace{(6x-2)}_{u'(x)}\underbrace{\left(3x^2-2x+4\right)^{-3}}_{[u(x)]^{-3}}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(3x^2-2x+4\right)^{-2}}{-2}\right]_0^2=\left[-\frac{1}{4\left(3x^2-2x+4\right)^2}\right]_0^2$

$=-\dfrac{1}{576}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{72}$

V. $f(x) = (x-2)\underbrace{e^x}_{>0}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(x-2)e^x$		$-$	0	$+$	

Intégration par parties:

$u(x) = x-2$; $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$; $v(x) = e^x$

$\int (x-2)e^x dx = (x-2)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x - e^x + k = (x-3)e^x + k \ (k \in \mathbf{R})$

Aire: $-\int_0^2 f(x)dx = -\left[(x-3)e^x\right]_0^2 = -\left(-e^2+3\right) = e^2 - 3 \approx 4{,}39$ u.a.
