



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques	CE;CF;CG	Date de l'épreuve :	02.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:25

PARTIE OBLIGATOIRE (48 points)

Question 1

(12 points)

Déterminons le prix d'une boîte de chaque sorte de masques :

- Choix des inconnues :

Soit x le prix d'une boîte de masques chirurgicaux standards : $x \in \mathbb{D}^+$

Soit y le prix d'une boîte de masques chirurgicaux avec virucide : $y \in \mathbb{D}^+$

Soit z le prix d'une boîte de masques FFP2 : $z \in \mathbb{D}^+$

- Mise en équation et résolution du système :

$$(S) \begin{cases} 36x + 27y + 54z = 1368 \\ 40x + 48y + 56z = 1752 \\ 28y + 42x + 56z = 1477 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 27y + 54z = 1368 & L_1 \leftarrow L_1 : 9 \\ 40x + 48y + 56z = 1752 & L_2 \leftarrow L_2 : 8 \\ 42x + 28y + 56z = 1477 & L_3 \leftarrow L_3 : 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 5x + 6y + 7z = 219 & L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \\ 6x + 4y + 8z = 211 & L_3 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 4L_2 : & 20x + 24y + 28z = & 876 \\ -5L_1 : & -20x - 15y - 30z = & -760 \\ \hline 4L_2 - 5L_1 : & 9y - 2z = & 116 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3L_1 : & 12x + 9y + 18z = & 456 \\ -2L_3 : & -12x - 8y - 16z = & -422 \\ \hline 3L_1 - 2L_3 : & y + 2z = & 34 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 9y - 2z = 116 & L_2 \\ y + 2z = 34 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 9y - 2z = 116 & L_2 \\ 10y = 150 & L_3 \end{cases}$$

$$L_3 : 10y = 150 \Leftrightarrow y = 15$$

$$\text{Dans } L_2 : 9 \cdot 15 - 2z = 116 \Leftrightarrow -2z = -19 \Leftrightarrow z = 9,5$$

$$\text{Dans } L_1 : 4x + 3 \cdot 15 + 6 \cdot 9,5 = 152 \Leftrightarrow 4x = 50 \Leftrightarrow x = 12,5$$

$$S = \{(12,5 ; 15 ; 9,5)\}$$

➤ Interprétation du résultat :

$$12,5 \in \mathbb{D}^+ ; 15 \in \mathbb{D}^+ \text{ et } 9,5 \in \mathbb{D}^+$$

donc une boîte de masques chirurgicaux standards coûte 12,50 €, une boîte de masques chirurgicaux avec virucide coûte 15 € et une boîte de masques FFP2 coûte 9,50 €.

Déterminons le prix de vente unitaire de chaque sorte de masques de protection « Made in Luxembourg » :

$$12,5 : 50 = 0,25$$

$$15 : 50 = 0,30$$

$$9,5 : 10 = 0,95$$

Un masque chirurgical standard coûte 0,25 €, un masque chirurgical avec virucide coûte 0,30 € et un masque FFP2 coûte 0,95 €.

Question 2

(9 points)

$$\text{Résolution du système} \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \\ x + 2y \geq 8 \\ 3x + 2y \geq 16 \\ x + y \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 & (1) \\ y \geq 1 & (2) \\ x + 2y - 8 \geq 0 & (3) \\ 3x + 2y - 16 \geq 0 & (4) \\ x + y - 12 \leq 0 & (5) \end{cases}$$

Résolution de (1) : Droite associée : $d_1 \equiv x = 2$

Point-test : $O(0; 0)$ $0 < 2$ donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (1).

Résolution de (2) : Droite associée : $d_2 \equiv y = 1$

Point-test : $O(0; 0)$ $0 < 1$ donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (2).

Résolution de (3) :

$$\text{Droite associée : } d_3 \equiv x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow d_3 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\text{Point-test : } O(0; 0) \quad 0 + 2 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$$

donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (3).

x	0	8
y	4	0

Résolution de (4) :

Droite associée : $d_4 \equiv 3x + 2y - 16 = 0 \Leftrightarrow d_4 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 8$

Point-test : $O(0;0) \quad 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$

donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (4).

x	0	6
y	8	-1

Résolution de (5) :

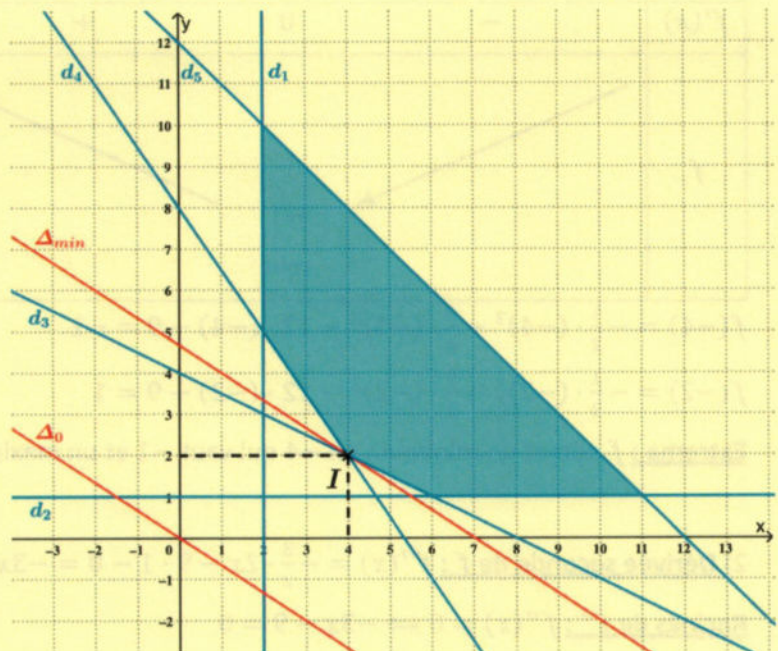
Droite associée : $d_5 \equiv x + y - 12 = 0 \Leftrightarrow d_5 \equiv y = -x + 12$

Point-test : $O(0;0) \quad 0 + 0 - 12 = -12 \leq 0$

donc le point O appartient au demi-plan solution de (5).

x	0	12
y	12	0

Polygone des contraintes :



Détermination du minimum de la fonction $f(x; y) = 2x + 3y$ sous les contraintes données.

Posons $\Delta_0 \equiv 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow \Delta_0 \equiv y = -\frac{2}{3}x$.

x	-3	3
y	2	-2

La droite Δ_{min} parallèle à la droite Δ_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de l'origine passe par le sommet I, point d'intersection des droites d_3 et d_4 . Par lecture graphique, on trouve $I(4; 2)$.

$f(4; 2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$ donc le minimum de la fonction f sous les contraintes données est 14.

Question 3**(5 + 4 + 2 = 11 points)**

$$1) f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x - 9$$

$$\text{Dérivée de } f : f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 - \frac{9}{2} \cdot 2x - 12 \cdot 1 - 0 = -\frac{3}{2}x^2 - 9x - 12$$

$$\text{Racines de } f' : f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 - 9x - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-12) = 81 - 72 = 9$$

$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{9}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{9-3}{-3} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{9}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{9+3}{-3} = -4$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

$$f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) - 9 = -1$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 9 = 1$$

Extrema : f admet un minimum en -4 qui vaut -1 et un maximum en -2 qui vaut 1 .

$$2) \text{ Dérivée seconde de } f : f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x - 9 \cdot 1 - 0 = -3x - 9$$

$$\text{Racines de } f'' : f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–
$\mathcal{C}_f$	U	PI	∩

$$f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 9 = 0$$

Point d'inflexion : La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I de coordonnées $(-3; 0)$.

3) Alternative 1 :

$$f(-3) = 0 \quad f'(-3) = -\frac{3}{2} \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 12 = \frac{3}{2}$$

$$t_{-3} \equiv mx + p \text{ avec } m = f'(-3) = \frac{3}{2} \text{ donc } t_{-3} \equiv \frac{3}{2}x + p$$

$$A(-3; 0) \in t_{-3} \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2} \cdot (-3) + p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$$

$$\text{Donc } t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

Alternative 2 :

L'équation réduite de la tangente t_{-3} à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -3 est donnée par :

$$t_{-3} \equiv y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) \quad f(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}(x + 3) + 0 \quad f'(-3) = -\frac{3}{2} \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 12 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

Question 4

(2 + (3+3) + 6 = 14 points)

$$1) \log \sqrt{\frac{b^5}{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{b^5}{a} = \frac{1}{2} (\log b^5 - \log a) = \frac{1}{2} (5 \log b - \log a) = \frac{1}{2} (5 \cdot 5 - (-4)) = \frac{29}{2}$$

2) a) $\forall x \in]-\infty; 2[$:

$$4 - 2 \log_4(4 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \log_4(4 - 2x) = -4 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(4 - 2x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_4(4 - 2x) = \log_4 4^2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2x = 16$$

$$\Leftrightarrow -2x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = -6$$

$$-6 \in]-\infty; 2[\quad S = \{-6\}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$:

Alternative 1 :

$$\begin{aligned}
6 - 3 \cdot 4^{4-2x} &= 2 - 4^{4-2x} & | +4^{4-2x} - 6 \\
\Leftrightarrow -2 \cdot 4^{4-2x} &= -4 & | :(-2) \\
\Leftrightarrow 4^{4-2x} &= 2 \\
\Leftrightarrow 4^{4-2x} &= 4^{\log_4 2} \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \log_4 2 \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \log_4 \sqrt{4} \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{1}{2} \log_4 4 \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{1}{2} & | -4 \\
\Leftrightarrow -2x &= -\frac{7}{2} & | :(-2) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \\
S &= \left\{ \frac{7}{4} \right\}
\end{aligned}$$

Alternative 2 :

$$\begin{aligned}
6 - 3 \cdot 4^{4-2x} &= 2 - 4^{4-2x} & | +4^{4-2x} - 6 \\
\Leftrightarrow -2 \cdot 4^{4-2x} &= -4 & | :(-2) \\
\Leftrightarrow 4^{4-2x} &= 2 & | \log(\cdot) \\
\Leftrightarrow \log(4^{4-2x}) &= \log 2 \\
\Leftrightarrow (4 - 2x) \log 4 &= \log 2 & | : \log 4 \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{\log 2}{\log 4} \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{\log 2}{\log 2^2} \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{\log 2}{2 \log 2} \\
\Leftrightarrow 4 - 2x &= \frac{1}{2} & | -4 \\
\Leftrightarrow -2x &= -\frac{7}{2} & | :(-2) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \\
S &= \left\{ \frac{7}{4} \right\}
\end{aligned}$$

Question 5**(2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)**

	Section E	Section F	Section G	Totaux
Admis	111	26	324	461
Non admis	15	3	73	91
Totaux	126	29	397	552

$$1) p(E) = p(\text{section E}) = \frac{126}{552} = \frac{21}{92} \approx 0,23.$$

$$2) p(G \text{ et } A) = p(\text{section G et admis}) = \frac{324}{552} = \frac{27}{46} \approx 0,59.$$

$$3) p(\bar{F} \text{ si } \bar{A}) = p(\text{pas en section F si pas admis}) = \frac{15+73}{91} = \frac{88}{91} \approx 0,97.$$

$$4) p(\bar{A} \text{ si } E) = p(\text{non admis si section E}) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42} \approx 0,12.$$

PARTIE AU CHOIX (12 points)

Question 6 a

(6 points)

Tableau de variation de f à l'aide du signe de f' d'après $C_{f'}$:

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f							

D'après les variations de f , $C_f = C_6$.Tableau de signe de f'' à l'aide des variations de f' d'après $C_{f'}$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'					

D'après le signe de f'' , $C_{f''} = C_1$ ou $C_{f''} = C_5$.Comme $C_{f'}$ est une parabole, alors f' est une fonction polynôme de degré 2 donc f'' est une fonction affine.La courbe C_1 est à écarter et on en déduit donc que $C_{f''} = C_5$.

Question 6 b

(6 points)

C_f et C_h admettent des asymptotes horizontales : ce sont donc des représentations graphiques de fonctions exponentielles de base a .

Comme $f(1) = \frac{1}{5} = a^1$, alors $a = \frac{1}{5}$ et l'expression analytique de la fonction f est $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Comme $h(1) = 5 = a^1$, alors $a = 5$ et l'expression analytique de la fonction h est $h(x) = 5^x$.

C_g admet une asymptote verticale : il s'agit donc de la représentation graphique d'une fonction logarithme de base a .

Comme $g\left(\frac{1}{5}\right) = 1 = \log_a a$, alors $a = \frac{1}{5}$ et l'expression analytique de la fonction g est $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Question 7 a**(2 + 2 + 2 = 6 points)**

Modélisons la situation à l'aide d'un tableau :

Nombre de cas possibles : 36

Soit S la somme des deux résultats obtenus.

1 ^{er} jet \ 2 ^{ème} jet	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$1) P(S \text{ est un nombre premier}) = P(S = 2 \text{ ou } S = 3 \text{ ou } S = 5 \text{ ou } S = 7 \text{ ou } S = 11)$$

$$= \frac{1+2+4+6+2}{36}$$

$$= \frac{15}{36}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$2) P(S > 3) = 1 - P(S \leq 3)$$

$$= 1 - P(S = 2 \text{ ou } S = 3)$$

$$= 1 - \frac{1+2}{36}$$

$$= \frac{33}{36}$$

$$= \frac{11}{12}$$

$$3) P(S = 7 \text{ si premier jet pair}) = \frac{P(S=7 \text{ et premier jet pair})}{P(\text{premier jet pair})}$$

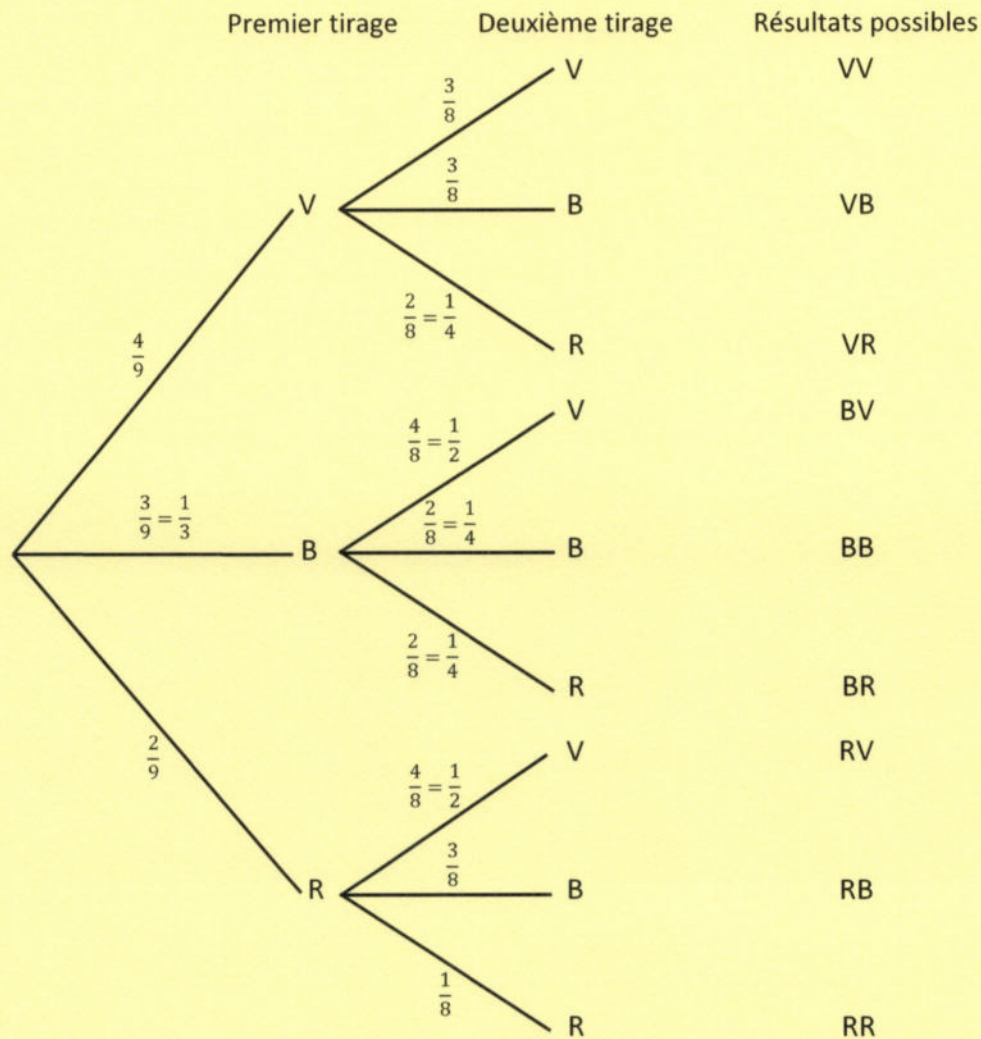
$$= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}}$$

$$= \frac{3}{18}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Question 7 b**(2 + 2 + 2 = 6 points)**

1) Diagramme en arbre :



$$2) p(\ll \text{tirer un jeton bleu et un jeton rouge} \gg) = P(BR) + P(RB)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$3) p(\ll \text{tirer deux jetons de la même couleur} \gg) = p(VV) + p(BB) + p(RR)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$