

Corrigé EFG\_MATHE1\_QE1

**Question 1 (7 points)**

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 5 & (1) \\ 2x - y + 3z = 1 & (2) \\ 5x + 8y - 18z = 13 & (3) \end{cases}$$

$$2 \cdot (1) : 6x + 4y - 8z = 10$$

$$-3 \cdot (2) : -6x + 3y - 9z = -3$$

---


$$(2') : 7y - 17z = 7$$

$$5 \cdot (1) : 15x + 10y - 20z = 25$$

$$-3 \cdot (3) : -15x - 24y + 54z = -39$$

---


$$-14y + 34z = -14$$

$$(3') \Leftrightarrow 7y - 17z = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 5 & (1) \\ 7y - 17z = 7 & (2') \\ 7y - 17z = 7 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 5 & (1) \\ 7y - 17z = 7 & (2') \\ 0z = 0 & (3'') : (2') - (3') \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons  $z = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Dans } (2') : 7y = 7 + 17\alpha \Leftrightarrow y = 1 + \frac{17}{7}\alpha$$

$$\text{Dans } (1) : 3x = -2\left(1 + \frac{17}{7}\alpha\right) + 4\alpha + 5 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{2}{7}\alpha$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \left\{ \left( 1 - \frac{2}{7}\alpha; 1 + \frac{17}{7}\alpha; \alpha \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left( \frac{19}{17} - \frac{2}{17}\alpha; \alpha; -\frac{7}{17} + \frac{7}{17}\alpha \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left( \alpha; \frac{19}{2} - \frac{17}{2}\alpha; \frac{7}{2} - \frac{7}{2}\alpha \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

## Question 2 (13 points)

Soit  $x$  le nombre de sacs traditionnels et soit  $y$  celui de sacs de sport.  
On obtient le système des contraintes :

$$\begin{cases} 12x + 25y \leq 75 \cdot 60 \\ 4x + 2,5y \leq 800 \\ x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0) \\ y \in \mathbb{R} \quad (y \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 25y - 4500 \leq 0 \\ 8x + 5y - 1600 \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0) \\ y \in \mathbb{R} \quad (y \geq 0) \end{cases}$$

Soit  $d_1 \equiv 12x + 25y - 4500 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{12}{25}x + 180$

$x$	$0$	$250$
$y$	$180$	$60$

Point-test :  $O(0; 0)$  :  $12 \cdot 0 + 25 \cdot 0 - 4500 = -4500 \leq 0$ ,

donc  $O$  appartient au demi-plan d'inéquation  $12x + 25y - 4500 \leq 0$  (demi-plan-solution)

Soit  $d_2 \equiv 8x + 5y - 1600 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{8}{5}x + 320$

$x$	$0$	$200$
$y$	$320$	$0$

Point-test :  $O(0; 0)$  :  $8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 1600 = -1600 \leq 0$ ,

donc  $O$  appartient au demi-plan d'inéquation  $8x + 5y - 1600 \leq 0$  (demi-plan-solution).

Soit  $d_3 \equiv x = 0$  et soit  $d_4 \equiv y = 0$ .

Il faut considérer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont positives.

Le bénéfice est donné par :  $B(x; y) = 12x + 9y$ .

Soit  $\Delta_0 \equiv 12x + 9y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$

$x$	$0$	$30$
$y$	$0$	$-40$

$\Delta_{\max}$  passe par le point  $I$ , point d'intersection de  $d_1$  avec  $d_2$ .

$$I(x; y) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{12}{25}x + 180 & (1) \\ y = -\frac{8}{5}x + 320 & (2) \end{cases}$$

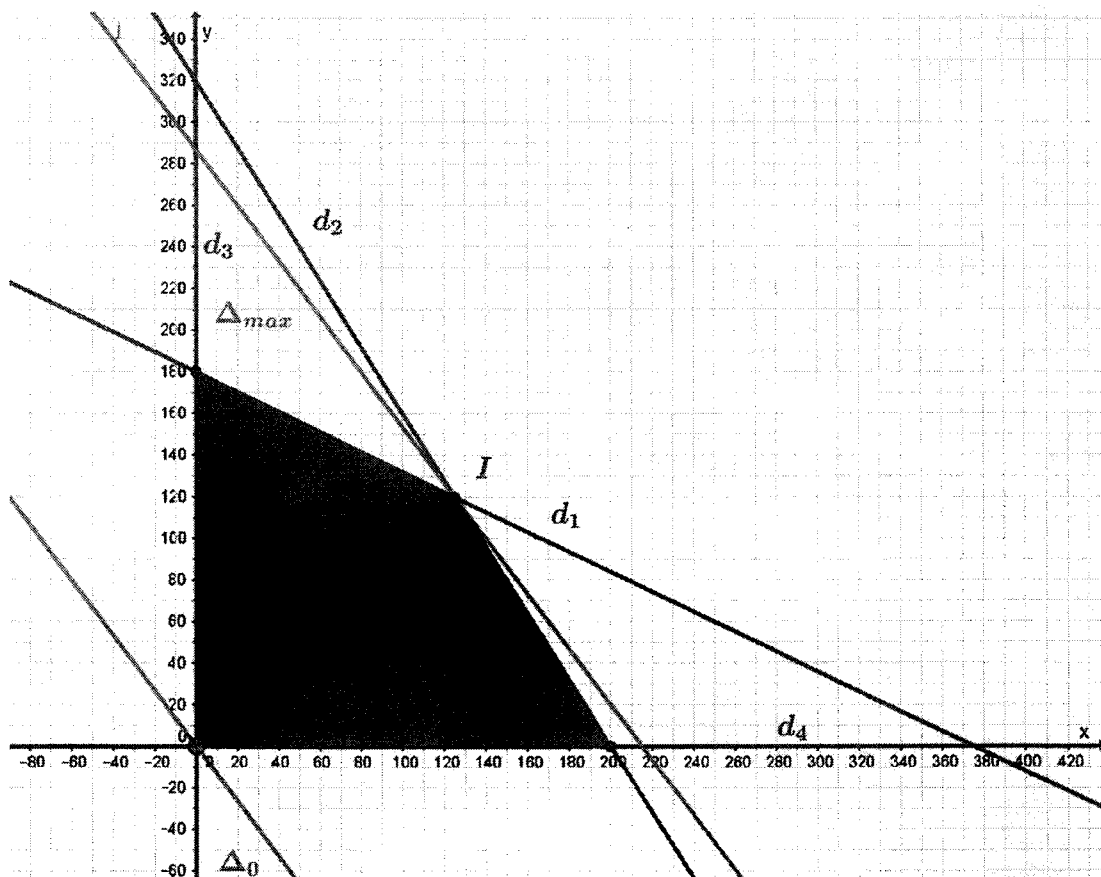
(1) dans (2) :  $-\frac{12}{25}x + 180 = -\frac{8}{5}x + 320 \Leftrightarrow 28x = 3500 \Leftrightarrow x = 125$

Dans (2) :  $y = -\frac{8}{5} \cdot 125 + 320 \Leftrightarrow y = 120$ .

D'où :  $I(125; 120)$

Le bénéfice est maximal pour la vente de 125 sacs traditionnels et 120 sacs de sport.

Il vaut :  $B(125; 120) = 12 \cdot 125 + 9 \cdot 120 = 2580 \text{ €}$ .



**Question 3 (5 points)**

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

1<sup>re</sup> méthode : par la formule de dérivation :

$$f'(x) = 6x - 2$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

2<sup>e</sup> méthode : par la définition :

$$f(2+h) = 3 \cdot (2+h)^2 - 2 \cdot (2+h) = 3 \cdot (4 + 4h + h^2) - 4 - 2h = 3h^2 + 10h + 8$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$$

$$f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 10h$$

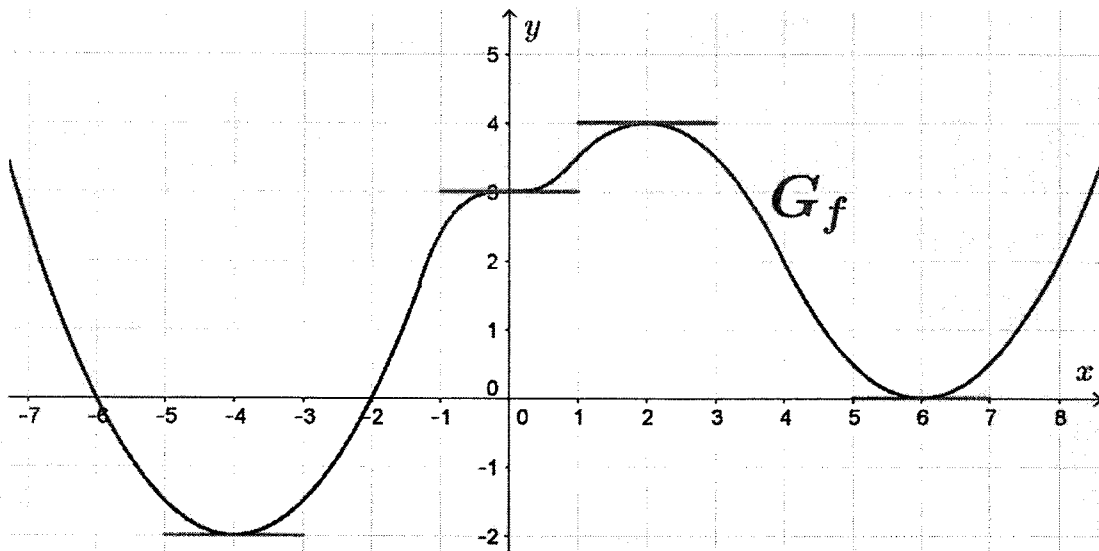
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3h^2 + 10h}{h} = \frac{h(3h+10)}{h} = 3h+10$$

$$f'(2) = 3 \cdot 0 + 10 = 10$$

**Question 4 (8 points)**

$x$	-4		0	2		6			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$f$	□	-2	□	3	□	4	□	0	□
		min		PI à tangente horizontale		Max		min	

$x$	-1,5		0	1	4				
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$G_f$	∪	1,5	∩	3	∪	3,5	∩	2	∪
		P.I.		P.I.		P.I.		P.I.	



**Question 5 (9 points)**

(a)  $C(t) = 5000 \cdot (1,0115)^t$

(b)  $C(t) = 1,3 \cdot C(0)$

$$\Leftrightarrow 5000 \cdot (1,0115)^t = 1,3 \cdot 5000 \quad | : 5000$$

$$\Leftrightarrow 1,0115^t = 1,3$$

$$\Leftrightarrow \log(1,0115)^t = \log 1,3$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log(1,0115) = \log 1,3$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log 1,3}{\log 1,0115}$$

$$t \approx 22,95$$

Après 23 ans, le capital aura augmenté de 30 %.

(c)  $C_1(t) = 5000 \cdot 1,0115^t$

$$C_2(t) = 6000 \cdot 1,0102^t$$

$$C_1(t) = C_2(t) \Leftrightarrow 5000 \cdot 1,0115^t = 6000 \cdot 1,0102^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,0115^t}{1,0102^t} = \frac{6000}{5000}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1,0115}{1,0102} \right)^t = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \log \left( \frac{1,0115}{1,0102} \right)^t = \log \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log \left( \frac{1,0115}{1,0102} \right) = \log \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log \frac{6}{5}}{\log \left( \frac{1,0115}{1,0102} \right)}$$

$$t \approx 141,77$$

Après 142 ans, les deux capitaux auront acquis la même valeur.

### Exercice 6 (8 points)

(a)

	VTT	COURSE	CITYBIKE	TOTAUX
HOMME	$720 - 330 = 390$	850	$120 : 2 = 60$	$1800 - 500 = 1300$
FEMME	$500 - 50 - 120 = 330$	$900 - 850 = 50$	$0,24 \cdot 500 = 120$	500
TOTAUX	$0,4 \cdot 1800 = 720$	$1800 - 720 - 180 = 900$	$60 + 120 = 180$	1800

$$(b) P(H \text{ et VTT}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{390}{1800} = \frac{13}{60} \approx 0,217 \quad (21,7\%)$$

$$(c) P(\text{Vélo de course sachant que F}) = \frac{P(\text{vélo de course et F})}{P(F)} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad (10\%)$$

### Exercice 7 (5+5=10 points)

A. Tirage sans ordre de 4 boules parmi  $8 + 5 + 2 = 15$  boules.

$$(1) \text{ Nombre de tirages possibles : } C_{15}^4 = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = 1365$$

(2) (a) Événement A : on tire 2 boules blanches parmi 8 et 2 boules noires parmi 2.

$$\text{Nombre de cas favorables : } C_8^2 \cdot C_2^2 = 28$$

$$P(A) = \frac{28}{1365} = \frac{4}{195} \approx 0,021 \quad (2,1\%)$$

(b) Événement B : on tire 4 boules de la même couleur, donc 4 boules blanches parmi 8 ou 4 boules vertes parmi 5 – il n'y a que 2 boules noires...

$$\text{Nombre de cas favorables : } C_8^4 + C_5^4 = 70 + 5 = 75$$

$$P(B) = \frac{75}{1365} = \frac{5}{91} \approx 0,055 \quad (5,5\%)$$

B. Tirage avec ordre et avec remise de 4 boules parmi 15 boules.

$$(1) \text{ Nombre de tirages possibles : } B_{15}^4 = 15^4 = 50625$$

(2) (a) Événement A : on tire 2 boules blanches parmi 8 suivies de 2 boules noires parmi 2.

$$\text{Nombre de cas favorables : } B_8^2 \cdot B_2^2 = 256$$

$$P(A) = \frac{256}{50625} \approx 0,0051 \quad (0,51\%)$$

(b) Événement B : on tire 4 boules blanches parmi 8 ou 4 boules noires parmi 2 (car avec remise) ou 4 boules vertes parmi 5.

$$\text{Nombre de cas favorables : } B_8^4 + B_2^4 + B_5^4 = 8^4 + 2^4 + 5^4 = 4737$$

$$P(B) = \frac{4737}{50625} = \frac{1579}{16875} \approx 0,094 \quad (9,4\%)$$