LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	**D, E-MATHF**	*Durée de l'épreuve :*	*1h 45 min*
		Date de l'épreuve :	*01/06/2021*

Question 1 **(10 points)**

On donne le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (-1 - i)z^2 + 39z - 49 - 119i$.

Résolvez $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ sachant que le polynôme P admet une seule racine imaginaire pure.

Question 2 (7 + 8 + 5 = **20 points)**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Soit le nombre complexe z $= \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^{12}}{(4-4i)^6}$

   Ecrivez z d'abord sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

2) Déterminez sous forme trigonométrique les racines cinquièmes complexes du nombre complexe $Z = 512\sqrt{3} - 512i$ et représentez dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les racines trouvées.

3) Soit le nombre complexe z $= \dfrac{2+2\sqrt{2}-2i}{1+\sqrt{2}+i}$

   Montrez que la forme algébrique de z est z $= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Question 3 (3 + 3 + 3 + 3 = **12 points)**

On donne le système suivant, où m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} 2x + (m-1)y + 2z = m \\ -x + my + z = -1 \\ (m+1)x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

1) Déterminez les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système admet une solution unique.

2) Résolvez et interprétez géométriquement le système pour $m = 8$.

3) Résolvez et interprétez géométriquement le système pour $m = 0$.

4) Résolvez et interprétez géométriquement le système pour $m = 7$.

Question 4 (4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = **18 points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace,

on donne les points $A(2;-1;3)$, $B(-4;3;-1)$, $C(1;2;4)$,$E(9;0;-8)$,$F(3;1;2)$,$G(-15;y;z)$,

le plan $\pi_1 \equiv 4x - y + 2 = 0$ et le plan $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 3$.

Les points $A,B\ et\ C$ ne sont pas alignés.

1) Déterminez une équation cartésienne du plan π_3 comprenant les points $A,B\ et\ C$.
2) Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point E et perpendiculaire au plan π_3.
3) Déterminez les coordonnées du point D, point de percée de la droite d dans π_3.
4) Vérifiez que le point F n'appartient pas au plan π_2.
5) Déterminez une équation cartésienne du plan π_4 comprenant le point F et parallèle au plan π_2.
6) Déterminez les composantes de deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan π_1.
7) Déterminez l'ordonnée et la cote du point G sachant que le point G appartient à la droite d.

Examen de fin d'études secondaires — Sections B, C, D, E, F

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\qquad$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$