EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

CORRIGÉ

Date :	23.09.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CA-MALA / CA-MALF / CA-MATT / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-SPO / CG-URBS		
					Numéro du candidat :		

Question 1 **(8 points)**

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}x-5\right)=\frac{1}{5}x-\frac{7}{3}-\frac{2y-z}{5} & \quad |\cdot 15 \\ x+2y-z=5 \\ -5y=2(4x+y)-3\left(z-\frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\cdot\left(\frac{3}{5}x-5\right)=3x-35-3\cdot(2y-z) \\ x+2y-z=5 \\ -5y=8x+2y-3z+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-50=3x-35-6y+3z \\ x+2y-z=5 \\ -8x-7y+3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=15 & \quad |:3 \\ x+2y-z=5 \\ -8x-7y+3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=5 \\ x+2y-z=5 \\ -8x-7y+3z=5 \end{cases}$$

L_1 et L_2 sont équivalentes. Le système est simplement indéterminé.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=5 \\ -8x-7y+3z=5 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2+8L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=5 & (1) \\ 9y-5z=45 & (2) \end{cases}$$

Posons $z=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

Alors : (2) $9y=45+5\alpha \Leftrightarrow y=5+\frac{5}{9}\alpha$

(1) $x=5-2\left(5+\frac{5}{9}\alpha\right)+\alpha=-5-\frac{1}{9}\alpha$

Finalement : $\boxed{S=\left\{(-5-\frac{1}{9}\alpha;\ 5+\frac{5}{9}\alpha;\ \alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}}$

ou $\boxed{S=\left\{\left(-4-\frac{1}{5}\alpha;\alpha;\ -9+\frac{9}{5}\alpha\right)\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}}$ ou $\boxed{S=\{(\alpha;\ -20-5\alpha;-45-9\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}}$

Question 2 **(12 points)**

Soit x le nombre d'emballages de type I et soit y le nombre d'emballages de type II.
Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 350 \\ 0{,}4x + 0{,}6y \geq 144 \\ 0{,}5x + 0{,}5y \geq 150 \\ 0{,}6x + 0{,}4y \geq 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x + 350 \\ y \geq -\frac{2}{3}x + 240 \\ y \geq -x + 300 \\ y \geq -\frac{3}{2}x + 350 \end{cases}$$

Posons $d_1 \equiv x = 0$ et $d_2 \equiv y = 0$.
On considère l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont positives.

Posons $d_3 \equiv y = -x + 350$.
Point-test : O(0; 0)
$0 < -0 + 350$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -x + 350$.

Posons $d_4 \equiv y = -\frac{2}{3}x + 240$.
Point-test : O(0; 0)
$0 < -\frac{2}{3} \cdot 0 + 240$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -\frac{2}{3}x + 240$.

Posons $d_5 \equiv y = -x + 300$.
Point-test : O(0; 0)
$0 < -0 + 300$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -x + 300$.

Posons $d_6 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 350$
Point-test : O(0; 0)
$0 < -\frac{3}{2} \cdot 0 + 350$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -\frac{3}{2}x + 350$.

La fonction « coûts de production » est donnée par $C(x; y) = 2x + 1{,}5y$.

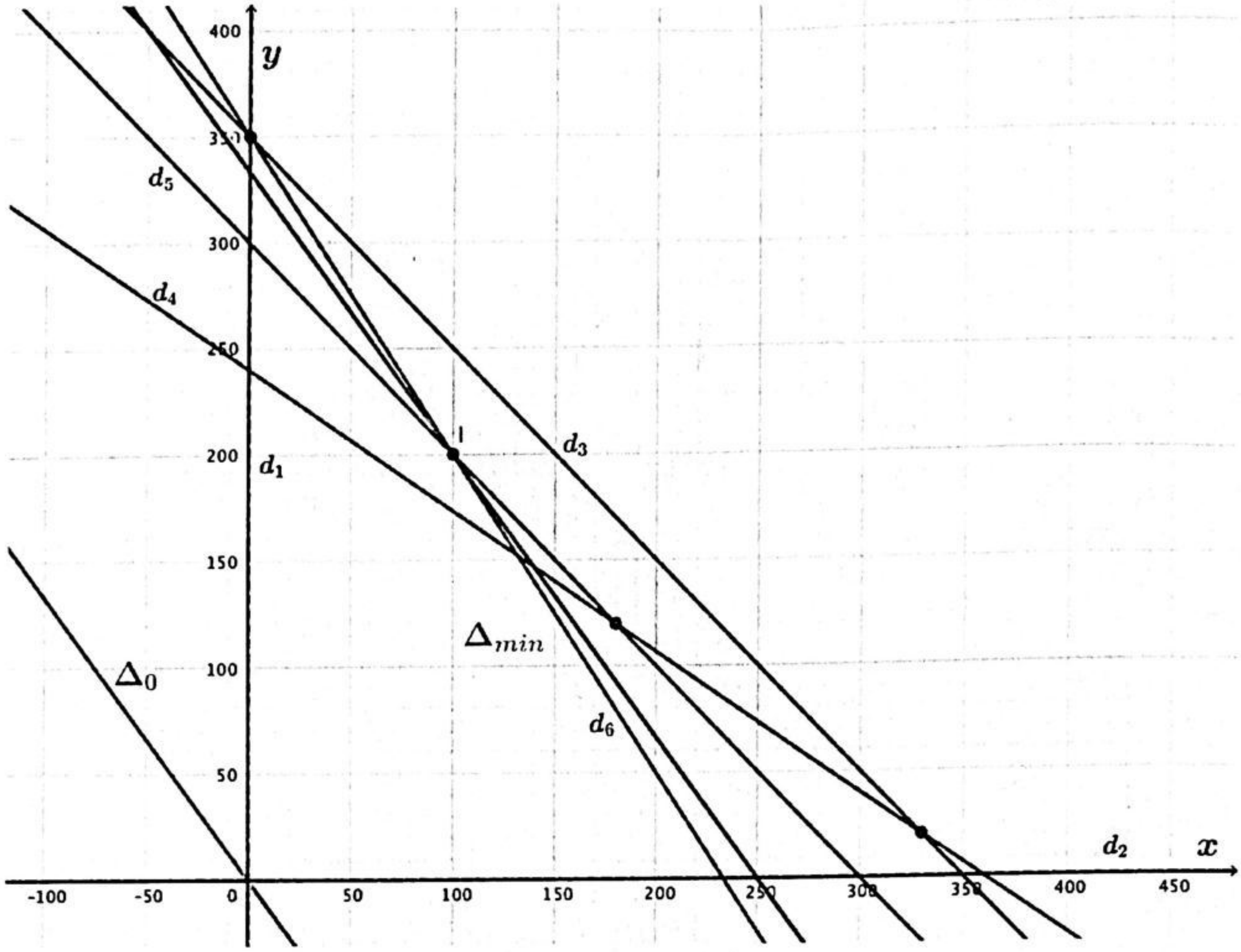
Posons $\Delta_0 \equiv 2x + 1{,}5y = 0$.

La droite Δ_{min} parallèle à Δ_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de l'origine passe par le sommet I.

Δ_{min} passe par le point I, point d'intersection des droites d_5 et d_6. Par lecture graphique, on trouve $I(100; 200)$.

L'entreprise doit produire 100 emballages de type I et 200 emballages de type II par jour afin de minimiser les coûts de production.

Le coût minimal est alors égal à $C(100; 200) = 2 \cdot 100 + 1{,}5 \cdot 200 = 200 + 300 = 500$ €.



Question 3

(5+3 = 8 points)

$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + \frac{19}{2}x + 3$

1) $f'(x) = -6x^2 + 16x + \frac{19}{2}$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 16x + \frac{19}{2} = 0$

   $\Delta = 484$ $\qquad x_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{19}{6}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{19}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2689}{54}$	$\searrow$	

f admet un minimum en $x = -\frac{1}{2}$ de valeur $\frac{1}{2}$ et un maximum en $x = \frac{19}{6}$ de valeur $\frac{2689}{54}$.

2) $f''(x) = -12x + 16$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{C}_f$			P.I.		

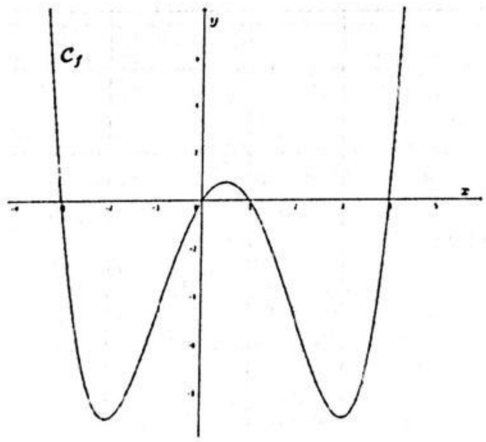
$\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\frac{679}{27}\right)$.

Question 4 **(3+2 = 5 points)**

1)

x	$-\infty$		-2		$0{,}5$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

2) Voici un exemple de courbe qui pourrait être celle de f.



Question 5 **[(3+3)+3 = 9 points]**

1)

a) $2 \cdot 5^{-4x} - 3 = -8 \cdot 5^{-4x} + 2 \quad |+8 \cdot 5^{-4x} \quad |+3$

$\Leftrightarrow \quad 10 \cdot 5^{-4x} = 5 \quad |:10$

$\Leftrightarrow \quad 5^{-4x} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \quad \log_5 5^{-4x} = \log_5 0{,}5$

$\Leftrightarrow \quad (-4x) = \log_5 0{,}5 \quad |:(-4)$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\log_5 0{,}5}{4}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-\log_5 0{,}5}{4}\right\}}$$

b) $-3-\log_7(2x-3)=-1-3\log_7(2x-3)$ $\quad |+3\log_7(2x-3) \quad |+3$

$\Leftrightarrow$ $2\log_7(2x-3)=2$ $\quad |:2$

$\Leftrightarrow$ $\log_7(2x-3)=1$

$\Leftrightarrow$ $\log_7(2x-3)=\log_7 7$

$\Leftrightarrow$ $2x-3=7$

$\Leftrightarrow$ $2x=10$

$\Leftrightarrow$ $x=5$ $\quad \boxed{S=\{5\}}$

2) $\log\left(\frac{a\cdot b^2}{\sqrt{c}}\right)$

$=\log(a\cdot b^2)-\log\sqrt{c}$

$=\log a+\log b^2-\dfrac{1}{2}\log c$

$=\log a+2\log b-\dfrac{1}{2}\log c=-5{,}2+2\cdot 3-\dfrac{1}{2}\cdot 10{,}4=-4{,}4$

Question 6

(4+5 = 9 points)

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	ampoules halogènes	ampoules fluocompactes	ampoules LED	Total
forme standard	15 %	27 %	18 %	60 %
forme tubulaire	10 %	18 %	12 %	40 %
Total	25 %	45 %	30 %	100 %

- 60% de 45% $=\frac{60}{100}\cdot 45=27\%$
  27% des ampoules fluocompactes ont une forme standard.
- 40% de 25% $=\frac{40}{100}\cdot 25=10\%$
  10% des ampoules halogènes ont une forme tubulaire.
- $60-27-15=18$
  18% des ampoules sont des ampoules LED de forme standard.
- $40-10-18=12$
  12% des ampoules sont des ampoules LED de forme tubulaire.
- $18+12=30$
  30% des ampoules sont des ampoules LED.

2)

a) p(ampoule fluocompacte) $=\frac{45}{100}=0{,}45$ (45%)

b) p(ampoule LED sachant qu'elle est de forme standard) $=\frac{18}{60}=0{,}3$ (30%)

c) p(ampoule de forme tubulaire sachant qu'elle est fluocompacte) $=\frac{18}{45}=0{,}4$ (40%)

d) p(ampoule qui n'est pas LED et qui est de forme standard) $=\frac{15+27}{100}=0{,}42$ (42%)

e) p(ampoule qui n'est pas LED sachant qu'elle est de forme standard) $=\frac{15+27}{60}=0{,}7$ (70%)

Question 7 **[(2+2)+3+2 = 9 points]**

1)

a) Il y a trois lettres « A » et deux lettres « N » dans le mot ANACONDA.

On peut former $\frac{8!}{3!\cdot 2!} = 3360$ mots différents.

b) Si les voyelles doivent rester ensemble, on peut former $3!\cdot 3!\cdot 4 = 144$ mots différents.

2) Il y a $C_1^1\cdot C_{36}^4 + C_3^1\cdot C_{12}^1\cdot C_{36}^3 = 58905 + 257040 = 315945$ mains de 5 cartes choisies dans un jeu de 52 cartes qui contiennent exactement un roi et un coeur.

La probabilité d'obtenir une telle main vaut $\frac{C_1^1\cdot C_{36}^4 + C_3^1\cdot C_{12}^1\cdot C_{36}^3}{C_{52}^5} = \frac{315945}{2598960} = \frac{177}{1456} \simeq 0{,}1216$ ($\simeq 12{,}16\%$).

3) $A =$ « Il y a au moins un étudiant en mathématiques dans le comité »

$\bar{A} =$ « Il n'y a aucun étudiant en mathématiques dans le comité ».

Cette probabilité peut donc être calculée en utilisant la formule $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

$$p(A) = 1 - \frac{C_5^0\cdot C_{25}^{10}}{C_{30}^{10}} = 1 - \frac{1\cdot 3268760}{30045015} \approx 0{,}8912$$

De manière alternative, on peut aussi calculer :

$$p(A) = \frac{C_5^1\cdot C_{25}^9}{C_{30}^{10}} + \frac{C_5^2\cdot C_{25}^8}{C_{30}^{10}} + \frac{C_5^3\cdot C_{25}^7}{C_{30}^{10}} + \frac{C_5^4\cdot C_{25}^6}{C_{30}^{10}} + \frac{C_5^5\cdot C_{25}^5}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}8912$$