

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	25.09.23	Durée :	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	Section(s) :	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations.

Question 1:

(6 points)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 4 \cdot (x + y) - z = 14 \\ 7z + 24 = 2 \cdot (4x + 3y) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 4x + 4y - z = 14 \\ 7z + 24 = 8x + 6y \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 4x + 4y - z = 14 \\ -8x - 6y + 7z = -24 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 & (1) \\ 2y + 5z = 4 & (2) - 2 \cdot (1) \\ -2y - 5z = -4 & (3) + 4 \cdot (1) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 & (1) \\ 2y + 5z = 4 & (2) \\ 0 \cdot z = 0 & (3) + (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z = r$ avec $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y - 3r = 5 \\ y = 2 - \frac{5}{2}r \\ z = r \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2 - \frac{5}{2}r - 3r = 5 \\ y = 2 - \frac{5}{2}r \\ z = r \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{11}{4}r \\ y = 2 - \frac{5}{2}r \\ z = r \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{4}r; 2 - \frac{5}{2}r; r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

En posant $y = r$ on obtient $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{37}{10} - \frac{11}{10}r; r; \frac{4}{5} - \frac{2}{5}r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

En posant $x = r$ on obtient $\mathcal{S} = \left\{ \left(r; \frac{37}{11} - \frac{10}{11}r; \frac{4}{11}r - \frac{6}{11} \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

Question 2:

(10+2+2=14 points)

1. Soit x le nombre de robes de modèle A et y le nombre de robes de modèle B .

Il faut résoudre le système suivant:
$$\begin{cases} x; y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 16 \\ 8x + 12y \leq 56 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x; y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 16 \\ 2x + 3y \leq 14 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Soit $d_1 \equiv 3x + 2y - 16 = 0 \iff y = 8 - \frac{3}{2}x$ donc $A(2; 5); B(4; 2) \in d_1$.

Soit $d_2 \equiv 2x + 3y - 14 = 0 \iff y = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}x$ donc $B(4; 2); C(1; 4) \in d_2$.

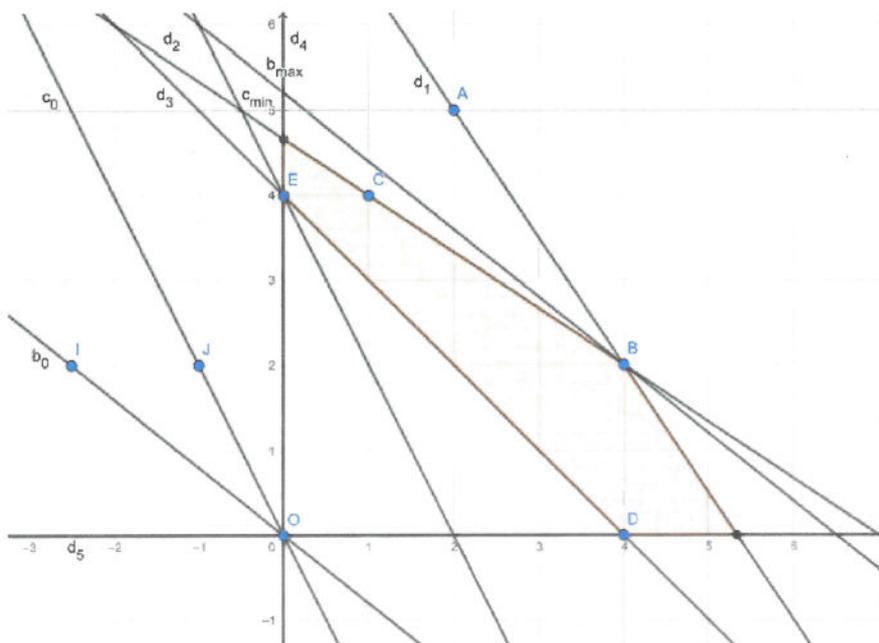
Soit $d_3 \equiv x + y - 4 = 0 \iff y = 4 - x$ donc $D(4; 0); E(0; 4) \in d_3$.

Soit $d_4 \equiv x = 0$ donc $O(0; 0); E(0; 4) \in d_4$.

Soit $d_5 \equiv y = 0$ donc $O(0; 0); D(4; 0) \in d_5$.

On choisit le point de coordonnées $(1; 1)$

dans $d_1 : -11 < 0$ dans $d_2 : -9 < 0$ dans $d_3 : -2 < 0$ dans $d_4 : 1 > 0$ dans $d_5 : 1 > 0$.



2. On a la fonction bénéfice $b(x; y) = 80x + 100y$

Soit $b_0 \equiv 80x + 100y = 0 \iff y = -\frac{4}{5}x$ donc $O(0; 0); I(-2, 5; 2) \in b_0$.

La droite b_{\max} parallèle à b_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de $O(0; 0)$ passe par $B(4; 2)$.

L'atelier doit fabriquer et vendre 4 robes de modèle A et 2 robes de modèle B pour obtenir un bénéfice maximal.

Ce bénéfice maximal est: $b(4; 2) = 4 \cdot 80 + 2 \cdot 100 = 520\text{€}$.

3. On a la fonction coût $c(x; y) = 40x + 20y$

Soit $c_0 \equiv 40x + 20y = 0 \iff y = -2x$ donc $O(0; 0); J(-1; 2) \in c_0$.

La droite c_{\max} parallèle à c_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de $O(0; 0)$ passe par $E(0; 4)$.

L'atelier doit fabriquer 0 robes de modèle A et 4 robes de modèle B pour avoir un coût minimal.

Ce coût minimal est: $c(0; 4) = 4 \cdot 20 = 80\text{€}$.

Partie II : Analyse.

Question 3:

(4+3+3=10 points)

1. Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$

$$f'(x) = -3x^2 + 10x - 3 \quad \Delta = 64; \sqrt{\Delta} = 8$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\searrow	min	\nearrow	Max	\searrow	

$$\text{min: } f\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -\frac{121}{27} \simeq -4,5$$

$$\text{Max: } f(3) = -3^3 + 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = 5$$

2. $f''(x) = -6x + 10$

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	
\mathcal{C}_f		convexe	P.I.	concave	

$$\text{P.I: } f\left(\frac{5}{3}\right) = -\left(\frac{5}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 4 = \frac{7}{27}$$

donc $A\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{27}\right)$ est le point d'inflexion de \mathcal{C}_f .

3. On a: $t_2 \equiv y = f'(2) \cdot x + b$ et $(2; f(2)) \in t_2$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 3 = 5$$

$$f(2) = -2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

$$\text{donc } (2; 2) \in t_2 \iff 2 = 5 \cdot 2 + b \iff b = -8$$

$$\text{ainsi } t_2 \equiv y = 5x - 8$$

ou

$$t_2 \equiv y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \text{ avec } a = 2$$

$$\text{Comme } f(2) = 2 \text{ et } f'(2) = 5 \text{ on a: } t_2 \equiv y = 5 \cdot (x - 2) + 2 \iff y = 5x - 8.$$

Question 4:

(2+2+2=6 points)

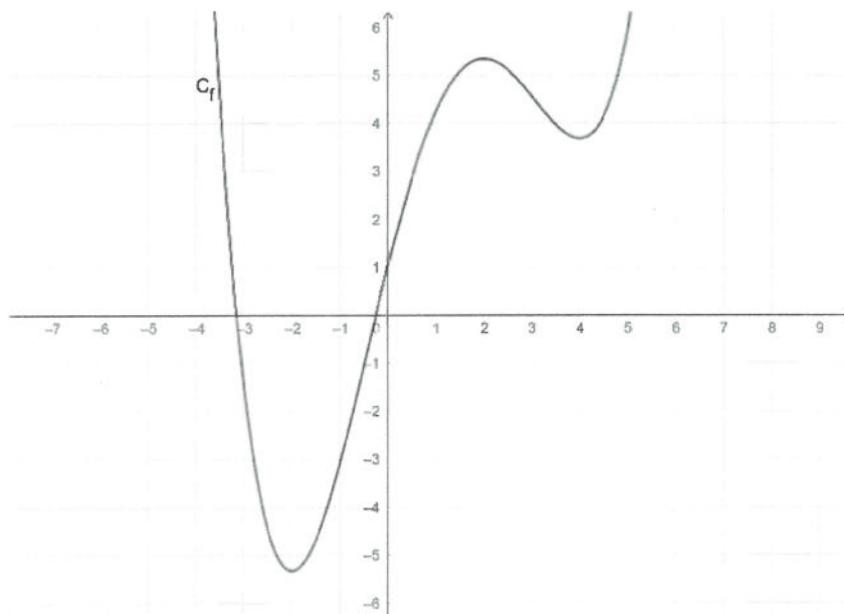
1. On voit que $f'(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		\searrow	min	\nearrow	Max	\searrow	min	\nearrow	

2.

x	$-\infty$		$\simeq -0,4$		$\simeq 3,1$		$+\infty$
$f'(x)$		\nearrow	Max	\searrow	min	\nearrow	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		convexe	P.I	concave	P.I	convexe	

3.



Question 5:

((2+2)+(2+3)=9 points)

1. Sachant que $\log(a) = -2,5$ et $\log(b) = -3,25$ calculer en utilisant les propriétés des logarithmes.

a) $\log(a^2 \cdot b) = \log(a^2) + \log(b) = 2 \cdot \log(a) + \log(b) = -5 - 3,25 = -8,25$

b) $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b^3}\right) = \log\sqrt{a} - \log(b^3) = \frac{1}{2} \cdot \log(a) - 3 \cdot \log(b) = 8,5$

2. a) $2 + 3 \cdot \log_2(x - 1) = 10 - \log_2(x - 1)$

$\iff 4 \cdot \log_2(x - 1) = 8$

$\iff \log_2(x - 1) = 2$

$\iff x - 1 = 2^2$

$\iff x = 5$

donc $\mathcal{S} = \{5\}$

- b) $120 - 2 \cdot 10^{2x+1} = 3 \cdot 10^{2x+1} - 380$

$\iff -5 \cdot 10^{2x+1} = -500$

$\iff 10^{2x+1} = 100$

$\iff 2x + 1 = \log 100$

$\iff 2x + 1 = 2$

$\iff x = \frac{1}{2}$

donc $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\}$

Partie III : Probabilités et combinatoire.

Question 6:

(3+2+2=7 points)

1. On a le tableau suivant:

	B	C	D	total:
garçons	10	184	126	320
filles	30	336	114	480
total:	40	520	240	800

2. On choisit au hasard un élève.

a) $P(\text{garçon de la section } B) = \frac{10}{800} = \frac{1}{80} = 1,25 \%$

b) $P(\text{garçon} \mid \text{section } D) = \frac{126}{240} = \frac{21}{40} = 52,5 \%$

Question 7:

(2+2+(2+2)=8 points)

Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules blanches et 8 boules noires.

1. On tire deux boules successivement avec remise de la première boule tirée.

Soit A l'événement " tirer deux boules blanches ".

$$P(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{6}{18} = \frac{1}{9} \simeq 11,11 \%$$

2. On tire deux boules successivement sans remise de la première boule tirée.

Soit B l'événement " tirer une boule blanche suivie d'une boule noire ".

$$P(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{8}{51} \simeq 15,69 \%$$

3. On tire deux boules simultanément de l'urne.

- a) Soit C l'événement " tirer deux boules de même couleur ".

$$P(C) = \frac{C_4^2 + C_6^2 + C_8^2}{C_{18}^2} = \frac{6 + 15 + 28}{153} = \frac{49}{153} \simeq 32,03 \%$$

- b) Soit D l'événement " tirer deux boules de couleurs différentes ".

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{49}{153} = \frac{104}{153} \simeq 67,97 \%$$

$$\text{ou } P(D) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_8^1 + C_6^1 \cdot C_8^1}{C_{18}^2} = \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8}{153} = \frac{104}{153} \simeq 67,97 \%$$