

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES  
**Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**

Date :	22.09.23	Durée :	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	Section(s) :	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Partie 1

**Question 1 - (8 points)**

$$\begin{cases} \frac{2y+4x}{2} - \frac{2y+5(x+z)}{3} + \frac{5}{6}(z-1) = 0 & E_1 \\ 3(z-3) + 2(y+z-x) = 2z - (x+10) & E_2 \\ 9z - 3x + 5 = 2 - 6y & E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y+4x) - 2(2y+5x+5z) + 5(z-1) = 0 \\ 3z - 9 + 2y + 2z - 2x = 2z - x - 10 \\ -3x + 6y + 9z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ -x + 2y + 3z = -1 \\ -3x + 6y + 9z = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x - 8z = 6 \\ 9x - 24z = 18 \end{cases} \begin{matrix} E_2 \leftarrow E_1 - E_2 \\ E_3 \leftarrow 3E_1 - E_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x - 8z = 6 \\ 0z = 0 \quad E_3 \leftarrow 3E_2 - E_3 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons  $z = r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x = 6 + 8r \\ z = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 5 + 5r - 2\left(2 + \frac{8}{3}r\right) \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - \frac{1}{3}r \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}r \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = \left\{ \left( 2 + \frac{8}{3}r ; \frac{1}{2} - \frac{1}{6}r ; r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

En posant  $y = r$ , on obtient  $\mathcal{S} = \{(10 - 16r ; r ; 3 - 6r), r \in \mathbb{R}\}$

En posant  $x = r$ , on obtient  $\mathcal{S} = \left\{ \left( r ; \frac{5}{8} - \frac{1}{16}r ; -\frac{3}{4} + \frac{3}{8}r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

**Question 2 - (12 points)**

Soit  $x$  le nombre de tasses et  $y$  le nombre de gobelets avec couvercles.

Systeme d'inéquations :

$$\begin{cases} x \geq 15 \\ y \geq 10 \\ x + y \geq 30 \\ 10x + 15y \leq 480 \end{cases}$$

[8 heures = 480 minutes]

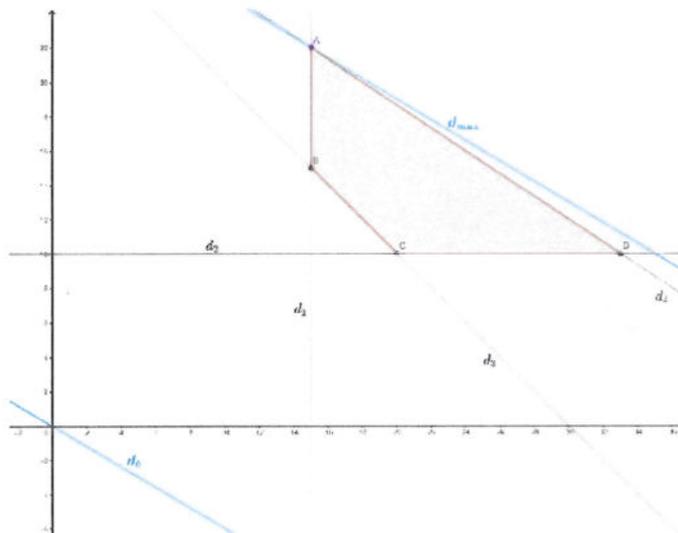
Droites à tracer dans un repère :

$$d_1 \equiv x = 15 \qquad d_2 \equiv y = 10 \qquad d_3 \equiv y = -x + 30 \qquad d_4 \equiv y = -\frac{2}{3}x + 32$$

Point-test  $O(0;0)$  :

- $0 < 15$  donc  $O$  n'appartient pas au demi-plan  $x \geq 15$
- $0 < 10$  donc  $O$  n'appartient pas au demi-plan  $y \geq 10$
- $0 + 0 < 30$  donc  $O$  n'appartient pas au demi-plan  $x + y \geq 30$
- $0 + 0 < 480$  donc  $O$  appartient au demi-plan  $10x + 15y \leq 480$

Polygone des contraintes :



Fonction à optimiser :  $R(x; y) = 15x + 25y$

$$\text{Soit } d_0 \equiv 15x + 25y = 0 \iff d_0 \equiv y = -\frac{3}{5}x$$

La droite  $d_{\max}$  parallèle à  $d_0$  qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le sommet  $A(15; 22)$  (par lecture graphique).

Conclusion :

La classe doit fabriquer et vendre 15 tasses et 22 gobelets avec couvercle pour obtenir une recette maximale.

$$\text{Or, } R(15; 22) = 15 \cdot 15 + 25 \cdot 22 = 775$$

Cette recette maximale est alors de 775 €.

**Question 3** - (9 points = 4+3+2)

1.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

-  $f'(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2$

- Racines de  $f' : f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

- Tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$		$\frac{17}{3}$	

$f(-2) = \frac{17}{3}$

$f$  n'admet pas d'extrema

2.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 3$  et  $f'(x) = -x^2 - 4x - 4$

-  $f''(x) = -2x - 4$

- Racines de  $f'' : f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

- Tableau de concavité :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$
$\mathcal{C}_f$		$\frac{17}{3}$	

$\mathcal{C}_f$  admet un point

d'inflexion :

$I\left(-2; \frac{17}{3}\right)$

3. Méthode 1 :

$T_0 \equiv y = f'(a)(x - a) + f(a)$  avec  $a = 0$

-  $f(0) = 3$

-  $f'(0) = -4$

Donc  $T_0 \equiv y = -4x + 3$

Méthode 2 :

$T_0 \equiv y = mx + p$  or,  $f'(0) = -4$  et  $T_0$  passe par le point  $A(0; f(0)) = A(0; 3)$

Ainsi,  $T_0 \equiv y = -4x + 3$

**Question 4** - (10 points = (3+3)+(2+2))

1. Equations :

a)  $-11 - 2 \cdot 8^{2x-1} = 3 \cdot 8^{2x-1} + 9$

$\Leftrightarrow -5 \cdot 8^{2x-1} = 20$

$\Leftrightarrow 8^{2x-1} = -4$  impossible, car une puissance de base positive ne peut pas être négative.

Ainsi,  $\mathcal{S} = \emptyset$

b)  $\log_5(1-x) - 5 = 7 - 2 \log_5(1-x)$

$\Leftrightarrow 3 \log_5(1-x) = 12$

$\Leftrightarrow \log_5(1-x) = 4$

$\Leftrightarrow 1-x = 5^4$

$\Leftrightarrow x = -624$       Ainsi,  $\mathcal{S} = \{-624\}$

2.  $\log a = 2,5$  et  $\log b = -2$

a)  $\log(a^2 b^{-3}) = \log a^2 + \log b^{-3}$   
 $= 2 \log a - 3 \log b$   
 $= 5 + 6$   
 $= 11$

b)  $\log \frac{\sqrt{b}}{a^2} = \log \sqrt{b} - \log a^2$   
 $= \frac{1}{2} \log b - 2 \log a$   
 $= -1 - 5$   
 $= -6$

**Question 5** - (6 points)

$f(x) = 2x^2 - x + 1$  et  $a = -1$

- Par les formules :

$f'(x) = 4x - 1$  et avec  $a = -1$ ,  $f'(-1) = -5$

- Par la définition :

Le taux de variation moyen de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{2(a+h)^2 - (a+h) + 1 - (2a^2 - a + 1)}{h} \quad \text{or, } a = -1 \\ &= \frac{2(1-2h+h^2) + 1 - h + 1 - 2 - 1 - 1}{h} \\ &= \frac{2h^2 - 5h}{h} \\ &= \frac{h(2h-5)}{h} \\ &= 2h - 5 \end{aligned}$$

Le taux de variation instantané de  $f$  en 1 est obtenu en remplaçant  $h$  par 0 dans cette expression :  
 Or,  $2 \cdot 0 - 5 = -5$       Ainsi,  $f'(-1) = -5$ .

## Partie 3

## Question 6 - (7 points = 3+2+2)

1. Tableau :

	Thé	Café noir	Boisson au lait	Total
Femme	21 %	10 %	19 %	50 %
Homme	9 %	35 %	6 %	50 %
Total	30 %	45 %	25 %	100 %

2. a)  $p(\text{femme qui ne boit pas de thé}) = \frac{10+19}{100} = 29 \%$

b)  $p(\text{homme sachant lait}) = \frac{6}{25} = 24 \%$

## Question 7 - (8 points = 2+3+3)

1. Simultanément :  $C_n^p$  avec  $n = 52$  et  $p = 5$ 

$$p(\text{obtenir 5 cartes rouges}) = \frac{C_{26}^5}{C_{52}^5} = \frac{253}{9\,996} \approx 2,5 \%$$

2.  $p(\text{obtenir au moins un roi}) = 1 - p(\text{n'obtenir aucun roi})$ 

$$= 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = \frac{18\,472}{54\,145} \approx 34,1 \%$$

3. Il faut distinguer les cas :

- 4 piques non dame et 1 dame non pique :

$$C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1\,485$$

- 3 piques non dame et 1 dame de pique et 1 autre carte non dame et non pique :

$$C_{12}^3 \cdot C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{36}^1 = 7\,920$$

$$\text{Ainsi, } p(\text{obtenir exactement une dame et 4 piques}) = \frac{1\,485 + 7\,920}{C_{52}^5} = \frac{627}{173\,264} \approx 0,4 \%$$