EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	06.06.23	*Durée :*	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques	*Section(s) :*	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{z-y}{3} & = & 0 \\ 2(4x-y)-3(2z-3x+4) & = & 4(4x+2y-3)-2(z+2y)+1 \\ \dfrac{x+3z}{6}-\dfrac{2y+z}{2} & = & 1{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2z+2y & = & 0 \\ 8x-2y-6z+9x-12 & = & 16x+8y-12-2z-4y+1 \\ x+3z-6y-3z & = & 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y-2z=0 & (1) \\ x-6y-4z=1 & (2) \\ x-6y=9 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2\cdot(1) & : & -6x & - & 10y & + & 4z & = & 0 \\ (2) & : & x & - & 6y & - & 4z & = & 1 \\ \hline (2') & : & -5x & - & 16y & & & = & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y-2z=0 & (1) \\ -5x-16y=1 & (2') \\ x-6y=9 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2') & : & -5x & - & 16y & = & 1 \\ 5\cdot(3) & : & 5x & - & 30y & = & 45 \\ \hline (3') & : & & - & 46y & = & 46 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y-2z=0 & (1) \\ -5x-16y=1 & (2') \\ -46y=46 & (3') \end{cases}$$

De $(3')$:

$$y=-1$$

Dans $(2')$:

$$-5x+16=1 \Leftrightarrow -5x=-15$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

Dans (1) :

$$9-5-2z=0 \Leftrightarrow 4=2z$$
$$\Leftrightarrow z=2$$

$S=\{(3;-1;2)\}$

Question 2 (12 points)

Soient x le nombre de Pères Noël de taille S et y le nombre de Pères Noël de taille L.
x et y sont des nombres entiers naturels.
On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 60 \\ 2x+y \leq 40 \\ x+3y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Construire les 5 droites

- $d_1 \equiv 2x+3y=60 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+20$

x	30	6
y	0	16

Point-test : $O(0;0)$: $0 \leq 60$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $2x+3y \leq 60$.

- $d_2 \equiv 2x+y=40 \Leftrightarrow y=-2x+40$

x	20	12
y	0	16

Point-test : $O(0;0)$: $0 \leq 40$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $2x+y \leq 40$.

- $d_3 \equiv x+3y=50 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{50}{3}$

x	5	20
y	15	10

Point-test : $O(0;0)$: $0 \leq 50$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $x+3y \leq 50$.

- $d_4 \equiv x=0$

x	0	0
y	0	10

Point-test : $I(10;0)$: $10 \geq 0$ donc I appartient au demi-plan d'inéquation $x \geq 0$.

- $d_5 \equiv y=0$

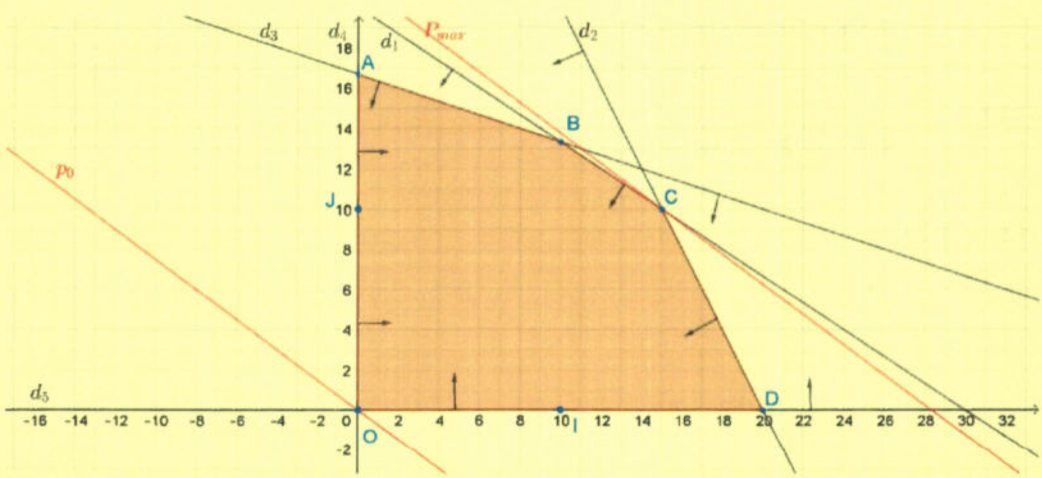
x	0	10
y	0	0

Point-test : $J(0;10)$: $10 \geq 0$ donc J appartient au demi-plan d'inéquation $y \geq 0$.

La fonction profit est définie par $p(x;y)=3x+4y$.

Soit $p_0 \equiv 3x+4y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x$

x	0	-4
y	0	3



La droite p_{max} parallèle à p_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le point C, intersection des droites d_1 et d_2.
D'après le graphique, $C(15;10)$.
Le profit du chocolatier est maximal en fabriquant 15 figures de taille S et 10 figures de taille L.
Le bénéfice s'élève alors à $p(15;10) = 45 + 40 = 85$€.

Question 3 (8 ((3+3)+2) points)

1)

a)

$$\begin{aligned}
8 \cdot 3^{4x+1} - 11 = 7 + 6 \cdot 3^{4x+1} &\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{4x+1} = 18 \\
&\Leftrightarrow 3^{4x+1} = 9 \\
&\Leftrightarrow (4x+1) \cdot \log 3 = \log 9 \\
&\Leftrightarrow 4x + 1 = \frac{\log 9}{\log 3} \\
&\Leftrightarrow 4x + 1 = 2 \\
&\Leftrightarrow 4x = 1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b)

$$\begin{aligned}
5 \cdot \log_4(2x-6) + 7 = 8 \cdot \log_4(2x-6) - 2 &\Leftrightarrow -3 \cdot \log_4(2x-6) = -9 \\
&\Leftrightarrow \log_4(2x-6) = 3 \\
&\Leftrightarrow 4^{\log_4(2x-6)} = 4^3 \\
&\Leftrightarrow 2x - 6 = 4^3 \\
&\Leftrightarrow 2x - 6 = 64 \\
&\Leftrightarrow 2x = 70 \\
&\Leftrightarrow x = 35
\end{aligned}$$

35 est à accepter.
$S = \{35\}$.

2)

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt{a \cdot b^3}\right) &= \frac{1}{2}\log(a \cdot b^3) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\log a + \log b^3\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\log a + 3 \cdot \log b) \\
&= \frac{1}{2} \cdot [3 + 3 \cdot (-4)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-9) \\
&= -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

<u>*Question 4 (11 (5+4+2) points)*</u>

1) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \quad (\Delta = 36)$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

$f(-2) = \frac{17}{3};\ f(4) = -\frac{37}{3}.$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	$-\frac{37}{3}$	$\nearrow$	
			max		min		

$A\left(-2; \frac{17}{3}\right)$ est le maximum et $B\left(4; -\frac{37}{3}\right)$ est le minimum de la courbe C_f.

2) $f''(x) = x - 1$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$f(1) = -\frac{10}{3}.$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x) = x - 1$		$-$	0	$+$	
C_f		$\cap$	$-\frac{10}{3}$	$\cup$	
			PI		

$C\left(1; -\frac{10}{3}\right)$ est le point d'inflexion de la courbe C_f.

3) $t_{-3} \equiv y = mx + p.$

Or $m = f'(-3) = \frac{7}{2}$ et t_{-3} passe par le point $D(-3; f(-3)) = D(-3;4).$

$D(-3;4) \in t_{-3} \Leftrightarrow 4 = \frac{7}{2} \cdot (-3) + p \Leftrightarrow p = \frac{29}{2}.$

$t_{-3} \equiv y = \frac{7}{2}x + \frac{29}{2}$

ou bien

$$t_{-3} \equiv y = f'(-3) \cdot (x + 3) + f(-3)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}(x + 3) + 4$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x + \frac{21}{2} + \frac{8}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x + \frac{29}{2}$$

Question 5 (6 (2+2+2) points)

1) On déduit du graphique le tableau des signes de $f'(x)$ et donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	TH	$\searrow$	TH	$\nearrow$	

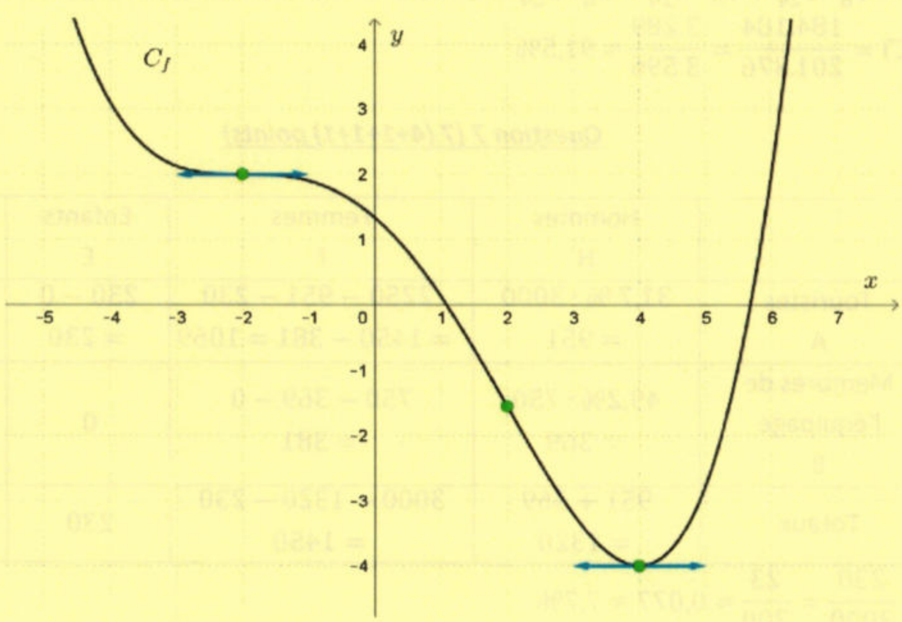
2) On obtient :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	
$(f'(x))' = f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Connaissant le signe de $f''(x)$, on peut en déduire le tableau de concavité de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	

3)



Question 6 (8 (2+3+3) points)

On tire simultanément une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. L'ordre n'importe pas.

Il y a : $C_{32}^{5} = 201.376$ tirages possibles.

1) A : « la main contient exactement un roi et deux dames. »

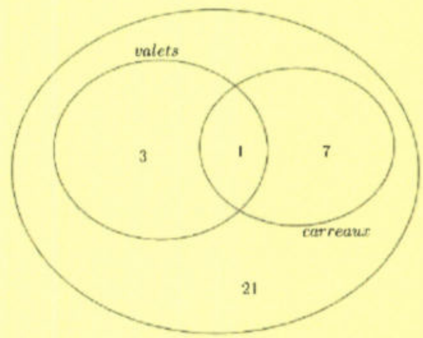
On tire 1 roi parmi 4, 2 dames parmi 4 et 2 autres cartes parmi 24.

Nombre de cas favorables : $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^2 = 4 \cdot 6 \cdot 276 = 6.624$

$$P(A) = \frac{6.624}{201.376} = \frac{207}{6.293} \approx 3{,}3\%$$

2) B : « la main contient exactement un valet et un carreau. »

On tire le valet de carreau et 4 autres cartes parmi 21 ou bien on tire 1 valet (non carreau) parmi 3, 1 carreau (non valet) parmi 7 et 3 autres cartes parmi 21.



Nombre de cas favorables :

$$C_1^1 \cdot C_{21}^4 + C_3^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{21}^3 = 1 \cdot 5.985 + 3 \cdot 7 \cdot 1.330$$
$$= 33.915$$

$$P(B) = \frac{33.915}{201.376} = \frac{4.845}{28.768} \approx 16{,}8\%$$

3) C : « la main contient au plus deux trèfles. »

On tire aucun trèfle parmi 8 et 5 autres cartes parmi 24 ou bien on tire 1 trèfle parmi 8 et 4 autres cartes parmi 24 ou bien 2 trèfles parmi 8 et 3 autres cartes parmi 24.

Nombre de cas favorables :

$$C_8^0 \cdot C_{24}^5 + C_8^1 \cdot C_{24}^4 + C_8^2 \cdot C_{24}^3 = 1 \cdot 42.504 + 8 \cdot 10.626 + 28 \cdot 2.024 = 184.184$$

$$P(C) = \frac{184.184}{201.376} = \frac{3.289}{3.596} \approx 91{,}5\%$$

Question 7 (7 (4+1+1+1) points)

1)

	Hommes H	Femmes F	Enfants E	Totaux
Touristes A	$31{,}7\ \% \cdot 3000$ $= 951$	$2250 - 951 - 230$ $= 1450 - 381 = 1069$	$230 - 0$ $= 230$	$3000 - 750$ $= 2250$
Membres de l'équipage B	$49{,}2\% \cdot 750$ $= 369$	$750 - 369 - 0$ $= 381$	0	$25\% \cdot 3000$ $= 750$
Totaux	$951 + 369$ $= 1320$	$3000 - 1320 - 230$ $= 1450$	230	3000

2) $p(E) = \dfrac{230}{3000} = \dfrac{23}{300} \approx 0{,}077 \approx 7{,}7\%$

3) $p(F\ et\ A) = \frac{1069}{3000} \approx 0{,}356 \approx 35{,}6\%$

4) $p(A\ si\ H) = \frac{951}{1320} = \frac{317}{440} \approx 0{,}720 \approx 72{,}0\%$