EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

CORRIGÉ

Date :	07.06.24	*Horaire :*	08:15 - 10:00	*Durée :*	105 minutes
Discipline :	MATHE - STRUC	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG / CE-MATF
				Numéro du candidat :	

Question 1

Soit bi, $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P.

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow 2(bi)^3 - (5+7i)(bi)^2 + (17+21i)(bi) + 4(1-13i) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2b^3 i + 5b^2 + 7b^2 i + 17bi - 21b + 4 - 52i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^3 + 7b^2 + 17b - 52 = 0 & (pi) \\ 5b^2 - 21b + 4 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$(pr) \underset{\Delta = 361}{\Leftrightarrow} b = 4 \vee b = \frac{1}{5}$.

Dans (pi) : $-2 \cdot 4^3 + 7 \cdot 4^2 + 17 \cdot 4 - 52 \overset{!}{=} 0$ et

$$-2\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 17 \cdot \frac{1}{5} - 52 = -\frac{6042}{125}$$

$z_0 = 4i$.

Schéma de Horner:

	2	$-5-7i$	$17+21i$	$4-52i$
$4i$		$8i$	$-4-20i$	$-4+52i$
	2	$-5+i$	$13+i$	$\boxed{0}$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 4i \ \vee \ 2z^2 - (5-i)z + 13 + i = 0$.

$\Delta = (5-i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (13+i) = -80 - 18i$.

Soit $\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de $-80-18i$.

Alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 & (1) \\ x^2 - y^2 = -80 & (2) \\ 2xy = -18 < 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow x = \pm 1$;

$(1) - (2) \Rightarrow y = \pm 9$;

de (3), x et y ont des signes contraires.

$\delta = \pm(1-9i)$.

Les racines du trinôme du second degré sont $\frac{5-i\pm(1-9i)}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \\ 1 + 2i \end{cases}$

$$S = \left\{4i; \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i; 1+2i\right\}$$

On en déduit :

$$P(z) = 2(z-4i)\left(z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right)(z-1-2i)$$

$$= (z-4i)(2z-3+5i)(z-1-2i)$$

Question 2

1)

a)

- Écrivons $z_1$sous forme trigonométrique.

$$z_1 = \frac{24\sqrt{3}+8i}{2i-\sqrt{3}} \cdot \frac{-\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}-2i} = \frac{-72-48i\sqrt{3}-8i\sqrt{3}+16}{4+3}$$

$$= \frac{-56-56i\sqrt{3}}{7}$$

$$= -8-8i\sqrt{3}$$

Déterminons le module r_1 et un argument φ_1 de z_1 :

$$r_1 = \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z_1 = 16\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

- Écrivons z_2 sous forme trigonométrique.

Déterminons le module r_2 et un argument φ_2 de z_2 :

$$r_2 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z_2 = 4\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) D'un côté :

$$Z = \frac{z_1}{z_2^3} = \frac{16\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\left[4\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3}$$

$$= \frac{16\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{4^3\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{16}{64}\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\text{cis}\frac{\pi}{12}$$

De l'autre côté :

$$Z=\frac{16\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{64\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}{64\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$
$$=\frac{-1-i\sqrt{3}}{4\cdot(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}\cdot\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{4\cdot 4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{16}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}i$$

ou bien

$$Z=\frac{-8-8i\sqrt{3}}{\left[2\sqrt{2}(1-i)\right]^3}$$
$$=\frac{-\cancel{8}(1+i\sqrt{3})}{\cancel{8}\cdot 2\sqrt{2}(-2i)(1-i)}$$
$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(1+i)}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$
$$=\frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\cdot 2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}i$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{16}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}i$$

On obtient donc :

- $\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{16}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- $\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $|-8+8i\sqrt{3}|=\sqrt{64+64\cdot 3}=16$

$$-8+8i\sqrt{3}=16\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

Les racines quatrièmes de $-8+8i\sqrt{3}$ sont données par

$z_k=\sqrt[4]{16}\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)=2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)$ (avec $k\in\{0;1;2;3\}$).

Les racines quatrièmes de $-8+8i\sqrt{3}$ sont :

$z_0=2\text{ cis}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}+i$ $\qquad$ $z_1=2\text{ cis}\frac{2\pi}{3}=-1+i\sqrt{3}$

$z_2=2\text{ cis}\frac{7\pi}{6}=-\sqrt{3}-i$ $\qquad$ $z_3=2\text{ cis}\frac{5\pi}{3}=1-i\sqrt{3}$

Question 3

1)

$$\det A=\left|\begin{matrix}4 & -m-3 & 3\\ 1 & -m & 2\\ m+1 & 0 & -2\end{matrix}\right|\begin{matrix}4 & -m-3\\ 1 & -m\\ m+1 & 0\end{matrix}$$
$$=8m-2m^2-8m-6+3m^2+3m-2m-6$$
$$=m^2+\mathrm{m}-12$$
$$=(m+4)(m-3)$$

$\det A=0\Leftrightarrow m=-4\vee m=3$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m\in\mathbb{R}\backslash\{-4;3\}$

2)

a) Si $m=-4$, $\det A=0$ et le système (S) n'admet pas de solution unique.

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}4x & + & y & + & 3z & = & 4\\ x & + & 4y & + & 2z & = & 6\\ -3x & & & - & 2z & = & -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccccccc}15x & & & + & 10z & = & 10\\ x & + & 4y & + & 2z & = & 6\\ -3x & & & - & 2z & = & -2\end{array}\right|\begin{array}{l}L1\leftrightarrow 4\cdot L1-L2\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccccc}x & + & 4y + & 2z & = 6\\ -3x & & - & 2z & = -2\end{array}\right|L1\Leftrightarrow L3$$

Le système est simplement indéterminé.
Posons $x=\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
De $L2 : z=-\frac{3}{2}\alpha+1$.
Dans $L1 : 4y=-\alpha+3\alpha-2+6\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\alpha+1$.
$S=\left\{\left(\alpha;\frac{1}{2}\alpha+1;-\frac{3}{2}\alpha+1\right)/\alpha\in\mathbb{R}\right\}$
Interprétation géométrique: Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant la droite passant par le point $A(0;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

b) Si $m=2$, $\det A\neq 0$ et le système (S) admet une solution unique.

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}4x & - & 5y & + & 3z & = & 4\\ x & - & 2y & + & 2z & = & -6\\ 3x & & & - & 2z & = & -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}4x & - & 5y & + & 3z & = & 4\\ 3x & & & - & 4z & = & 38\\ 3x & & & - & 2z & = & -2\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ L2\leftrightarrow 2\cdot L1-5\cdot L2\\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}4x & - & 5y & + & 3z & = & 4\\ 3x & & & - & 4z & = & 38\\ & & & - & 2z & = & 40\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \\ L3\leftrightarrow L2-L3\end{array}$$

De $L3 : z=-20$.
Dans $L2 : 3x-4\cdot(-20)=38\Leftrightarrow 3x=-42\Leftrightarrow x=-14$.
Dans $L1 : 4\cdot(-14)-5y+3\cdot(-20)=4\Leftrightarrow 5y=-56-60-4\Leftrightarrow y=-24$.
$S=\{(-14;-24;-20)\}$
Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans ayant un unique point en commun à savoir le point $B(-14;-24;-20)$.

c) Si $m=3$, $\det A=0$ et le système (S) n'admet pas de solution unique.

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}4x & - & 6y & + & 3z & = & 4\\ x & - & 3y & + & 2z & = & -8\\ 4x & & & - & 2z & = & -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}4x & - & 6y & + & 3z & = & 4\\ 2x & & & - & z & = & 20\\ 4x & & & - & 2z & = & -2\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ L2\leftrightarrow L1-2\cdot L2\\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}4x & - & 6y & + & 3z & = & 4\\ 2x & & & - & z & = & 20\\ & & & & 0 & = & 42\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \\ L3\leftrightarrow 2\cdot L2-L3\end{array}$$

Comme la dernière équation est impossible, le système est impossible.
$S=\emptyset$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans n'ayant aucun point en commun.

Question 4

1) d est la droite passant par le point $B(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$. d est incluse dans π si et seulement si B est un point de π et $\vec{v}$ est un vecteur directeur de π.

- $$B(1;2;-1) \in \pi \Leftrightarrow 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 8 = 0$$
  $$\Leftrightarrow 2 - 6 - 4 + 8 \overset{!}{=} 0$$
- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur normal à π.

  $\vec{v}$ est un vecteur directeur de π
  $$\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$$
  $$\Leftrightarrow \vec{v} \odot \vec{n} = 0$$
  $$\Leftrightarrow 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) + (-3)\cdot 4 = 0$$
  $$\Leftrightarrow 6 + 6 - 12 \overset{!}{=} 0$$

d est incluse dans π.

2)

$$X(x;y;z) \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AX} = \alpha \cdot \vec{n}$$
$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x-2 & = & 2\alpha \\ y-3 & = & -3\alpha \\ z-4 & = & 4\alpha \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \left\{\begin{array}{rcr|l} x-2 & = & 2\alpha & \\ 3x-6+2y-6 & = & 0 & L2 \leftrightarrow 3\cdot L1 + 2\cdot L2 \\ 2x-4-z+4 & = & 0 & L3 \leftrightarrow 2\cdot L1 - L3 \end{array}\right.$$

D'où un système d'équations cartésiennes de d' :

$$d' \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

3)

$$X(x;y;z) \in d'' \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AX} = \alpha \cdot \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x-2 & = & 3\alpha \\ y-3 & = & 3\alpha \\ z-4 & = & \alpha \end{cases}$$

D'où un système d'équations paramétriques de d'' :

$$d'' \equiv \begin{cases} x = 3\alpha + 2 \\ y = 3\alpha + 3 \\ z = \alpha + 4 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$X(x;y;z) \in d'' \cap \pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha + 2 \\ y = 3\alpha + 3 \\ z = \alpha + 4 \\ 2x - 3y + 4z + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha + 2 \\ y = 3\alpha + 3 \\ z = \alpha + 4 \\ 6\alpha + 4 - 9\alpha - 9 + 4\alpha + 16 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha + 2 \\ y = 3\alpha + 3 \\ z = \alpha + 4 \\ \alpha = -19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -55 \\ y = -54 \\ z = -15 \\ \alpha = -19 \end{cases}$$

$d'' \cap \pi = \{C(-55; -54; -15)\}$

4)

$$\begin{aligned} d \perp d'' &\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \vec{v} \odot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9 - 6 - \overbrace{3 = 0}^{!} \end{aligned}$$

d et d'' sont orthogonales.

5)

$$\begin{aligned} X(x;y;z) \in \pi' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AX}, \vec{n}, \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 3 \\ y-3 & -3 & 3 \\ z-4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \cdot (x-2) + 6 \cdot (z-4) + 12 \cdot (y-3) \\ &\quad + 9(z-4) - 12 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow -15 \cdot (x-2) + 10 \cdot (y-3) + 15 \cdot (z-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y-3) - 3 \cdot (z-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 2y - 3z + 12 = 0 \end{aligned}$$

$\pi' \equiv 3x - 2y - 3z + 12 = 0$

6) Soit $\vec{p}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan π'.

$d \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires. Or $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont égaux, donc colinéaires.
d est perpendiculaire au plan π'.