EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
CORRIGÉ							
Date :	03.06.24		*Horaire :*	08:15 - 11:00		*Durée :*	165 minutes
Discipline :	MATHE - ANALY	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG / CE-MATF		
					Numéro du candidat :		

Question théorique **4 points**

Voir EM page 55.

Question 1 **(4 + 4 + 4 + 3) + 5 = 20 points**

1) $f(x) = -(x+3)^2 e^{-3-x} = (-x^2-6x-9)e^{-3-x}$

a) C.E. : / $\quad$ $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(-x^2-6x-9)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to-\infty}}}_{\to 0} \qquad f.i. \text{"}\infty\cdot 0\text{"}$$

[Calcul à part : $\lim_{x\to\pm\infty}(-x^2-6x-9) = \lim_{x\to\pm\infty} -x^2 = -\infty$]

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-x^2-6x-9}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{\overbrace{3+x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}} \qquad f.i. \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-2x-6}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{3+x}}_{\to+\infty}} \qquad f.i. \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\underbrace{e^{3+x}}_{\to+\infty}}$$

$$= 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(-x^2-6x-9)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = -\infty$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale à gauche.

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique à gauche par les formules de Cauchy :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\underbrace{-x-6}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{9}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique à gauche.

b) $\text{Dom}f' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x-6)e^{-3-x} + (-x^2-6x-9)\cdot(-1)\cdot e^{-3-x} = (-2x-6+x^2+6x+9)e^{-3-x} \\ &= (x^2+4x+3)e^{-3-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-3-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2+4x+3.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+3=0 \qquad\qquad [\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 = 2^2 > 0] \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4-2}{2\cdot 1} \quad \vee \quad x = \frac{-4+2}{2\cdot 1} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -3 \quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 Max	$\searrow$	$-\frac{4}{e^2}$ min	$\nearrow$	0

$f(-3) = -(-3+3)^2 e^{-3-(-3)} = 0 \qquad f(-1) = -(-1+3)^2 e^{-3-(-1)} = -4e^{-2} = -\frac{4}{e^2} \simeq -0{,}54$

f admet un minimum en -1 qui vaut $-\frac{4}{e^2}$ et un maximum en -3 qui vaut 0.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse -3 et -1.

c) $\text{Dom}f'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+4)e^{-3-x} + (x^2+4x+3)\cdot(-1)\cdot e^{-3-x} = (2x+4-x^2-4x-3)e^{-3-x} \\ &= (-x^2-2x+1)e^{-3-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-3-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-x^2-2x+1$.

$$\begin{bmatrix} \Delta & = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1 \\ & = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2-2\sqrt{2}}{2\cdot(-1)} \quad \vee \quad x = \frac{2+2\sqrt{2}}{2\cdot(-1)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1+\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -1-\sqrt{2} \\ &\qquad\quad \simeq 0{,}41 \qquad\qquad\quad \simeq -2{,}41 \end{aligned}$$

Tableau de concavité de f :

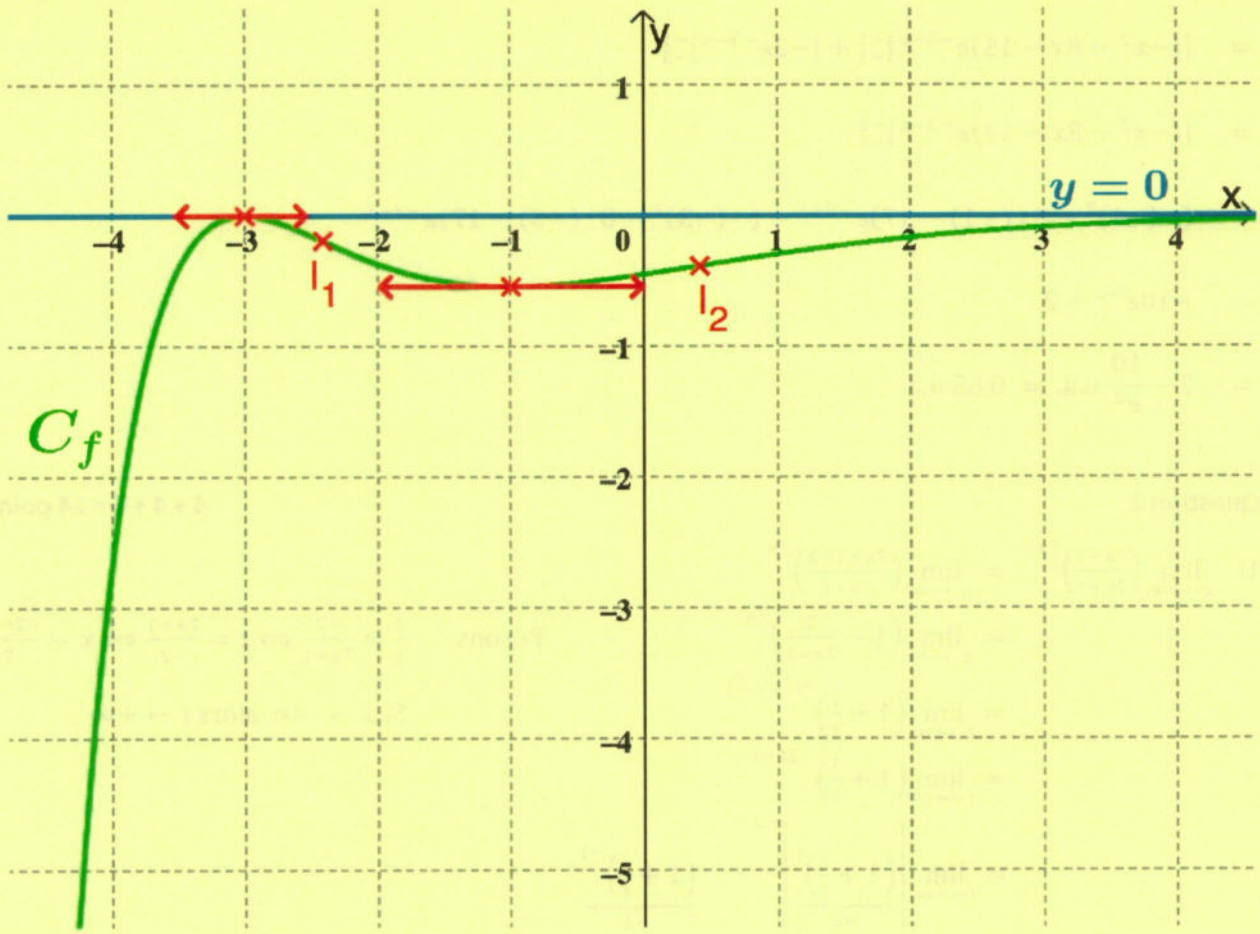
x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\mathcal{C}_f$	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

$$f(-1-\sqrt{2}) = -(-1-\sqrt{2}+3)^2 e^{-3-(-1-\sqrt{2})} = -(2-\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} = -(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \simeq -0{,}19$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = -(-1+\sqrt{2}+3)^2 e^{-3-(-1+\sqrt{2})} = -(2+\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} = -(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \simeq -0{,}38$$

$\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion : $I_1\left(-1-\sqrt{2}; -(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ et $I_2\left(-1+\sqrt{2}; -(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}\right)$

d)



2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0$ (d'après le tableau de variation ou la représentation graphique de f)

L'aire de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$ est donnée par :

$$A = -\int_{-3}^{-1} f(x)dx = -\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 6x - 9)e^{-3-x}dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (x^2 + 6x + 9)e^{-3-x}dx$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = x^2 + 6x + 9 & v'(x) = e^{-3-x} \\ u'(x) = 2x + 6 & v(x) = -e^{-3-x} \end{bmatrix}$$

$$\overset{IPP}{=} \quad [-(x^2 + 6x + 9)e^{-3-x}]_{-3}^{-1} + \int_{-3}^{-1} (2x + 6)e^{-3-x}dx$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = 2x + 6 & v'(x) = e^{-3-x} \\ u'(x) = 2 & v(x) = -e^{-3-x} \end{bmatrix}$$

$$\overset{IPP}{=} \quad [(-x^2 - 6x - 9)e^{-3-x}]_{-3}^{-1} + [-(2x + 6)e^{-3-x}]_{-3}^{-1} + \int_{-3}^{-1} 2e^{-3-x}dx$$

$$= \quad [(-x^2 - 8x - 15)e^{-3-x}]_{-3}^{-1} + [-2e^{-3-x}]_{-3}^{-1}$$

$$= \quad [(-x^2 - 8x - 17)e^{-3-x}]_{-3}^{-1}$$

$$= \quad (-(-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 17)e^{-3+1} - (-(-3)^2 - 8 \cdot (-3) - 17)e^{-3+3}$$

$$= \quad -10e^{-2} + 2$$

$$= \quad 2 - \frac{10}{e^2} \text{ u.a.} \simeq 0{,}65 \text{ u.a.}$$

Question 2 **4 + 4 + 6 = 14 points**

1)
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{7x-1}{7x+1}\right)^{7x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{7x+1-2}{7x+1}\right)^{7x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{7x+1}\right)^{7x}$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{7\left(\frac{-2t-1}{7}\right)}$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t-1}$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\right]^{-2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-1}}_{\to 1}$$
$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Posons : $\frac{1}{t} = \frac{-2}{7x+1} \Leftrightarrow t = \frac{7x+1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-2t-1}{7}$

Si $x \to -\infty$, alors $t \to +\infty$

2) $(E)\quad 7^x - 7^{-x} = 7(1 + 7^{-x})$ C.E. : / $\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\quad (E) \iff 7^x - 7^{-x} = 7 + 7 \cdot 7^{-x}$

$\iff 7^x - 7 - 8 \cdot 7^{-x} = 0 \qquad |\cdot 7^x > 0$

$\iff 7^{2x} - 7 \cdot 7^x - 8 = 0$ Posons $y = 7^x$ avec $y > 0$

$\iff y^2 - 7y - 8 = 0$ $[\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 81 = 9^2 > 0]$

$\iff y = \dfrac{7-9}{2} \;\vee\; y = \dfrac{7+9}{2}$

$\iff \underbrace{y = -1}_{\text{à écarter car } y>0} \;\vee\; y = 8$

$\iff 7^x = 8 \qquad |\log_7 \text{ bij.}$

$\iff x = \log_7 8$

$\iff x = 3\log_7 2$

$S = \{3\log_7 2\}$

3) $(I)\quad 1 + \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leq \log_7(2x-1) - \log_{\sqrt{7}}(2-x)$

C.E. : (1) $x + 2 > 0 \iff x > -2$ (2) $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$ (3) $2 - x > 0 \iff x < 2$

donc $\mathrm{Dom}(I) = \left]\frac{1}{2}; 2\right[$.

$\forall x \in \left]\dfrac{1}{2}; 2\right[\quad (I) \iff \log_7 7^1 + \dfrac{\log_7(x+2)}{\log_7 \frac{1}{7}} \leq \log_7(2x-1) - \dfrac{\log_7(2-x)}{\log_7\sqrt{7}}$

$\iff \log_7 7 + \dfrac{\log_7(x+2)}{-\log_7 7} \leq \log_7(2x-1) - \dfrac{\log_7(2-x)}{\frac{1}{2}\log_7 7}$

$\iff \log_7 7 - \log_7(x+2) \leq \log_7(2x-1) - 2\log_7(2-x)$

$\iff \log_7 7 + 2\log_7(2-x) \leq \log_7(2x-1) + \log_7(x+2)$

$\iff \log_7[7(2-x)^2] \leq \log_7[(2x-1)(x+2)] \qquad |\log_7 \text{ bij. } \nearrow$

$\iff 7(2-x)^2 \leq (2x-1)(x+2)$

$\iff 28 - 28x + 7x^2 - (2x^2 + 3x - 2) \leq 0$

$\iff 5x^2 - 31x + 30 \leq 0$

T.D.S. de $5x^2 - 31x + 30$: $\Delta = (-31)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 30 = 361 = 19^2 > 0$

$x_1 = \frac{31-19}{10} = \frac{6}{5} \qquad x_2 = \frac{31+19}{10} = 5$

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		5		$+\infty$
$5x^2-31x+30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left[\frac{6}{5};5\right]\cap\left]\frac{1}{2};2\right[=\left[\frac{6}{5};2\right[$$

Question 3 **5 + 3 = 8 points**

1) $f(x)=3-x-\ln\frac{x-3}{x+3}$

C.E. : (1) $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$

(2) $\frac{x-3}{x+3}>0$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-3[\,\cup\,]3;+\infty[$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

donc $\mathrm{Dom}f=\,]-\infty;-3[\,\cup\,]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3-x-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=-\infty$$

[Calcul à part : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1=1$]

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3-x-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=+\infty$$

Il n'y a donc pas d'A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Déterminons si $\mathcal{C}_f$ admet une A.O. au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Alternative 1 :	Alternative 2 : Par les formules de Cauchy
$f(x)=-x+3+\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)=-\ln\frac{x-3}{x+3}$ Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\ln\frac{x-3}{x+3}=0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta\equiv y=-x+3$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3-x-\ln\frac{x-3}{x+3}}{x}$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}-1-\underbrace{\frac{\ln\frac{x-3}{x+3}\ \to 0}{x\ \to\pm\infty}}_{\to 0}\right)$ $=-1$ $\lim\limits_{\pm\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{\pm\infty}\left(3-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=3$ Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta\equiv y=-x+3$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2) Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son A.O. $\Delta \equiv y = -x + 3$:

Soit $M\big(x; f(x)\big) \in \mathcal{C}_f$ et $N(x; -x+3) \in \Delta$.

On a : $y_M - y_N = f(x) - (-x+3) = -\ln\frac{x-3}{x+3}$

$$\begin{aligned}
y_M - y_N > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\ln\frac{x-3}{x+3} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\frac{x-3}{x+3} < 0 \\
&\overset{\text{ln bij.} \nearrow}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x-3}{x+3} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-6}{x+3} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x+3 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > -3
\end{aligned}$$

x	$-\infty$ -3		3 $+\infty$
$y_M - y_N$	$-$		$+$
Position relative	$\frac{\Delta}{\mathcal{C}_f}$		$\frac{\mathcal{C}_f}{\Delta}$

La courbe $\mathcal{C}_f$ se situe en-dessous de Δ sur $]-\infty; -3[$ et au-dessus de Δ sur $]3; +\infty[$.

Question 4 **4 points**

Par lecture graphique, les abscisses des points d'intersection A et B des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont -2 et 1 et $\forall x \in [-2; 1], \quad g(x) > f(x) > 0.$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{1} ([g(x)]^2 - [f(x)]^2) dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} [(3-x)^2 - (x^2+1)^2] dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} [x^2 - 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1)] dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} (-x^4 - x^2 - 6x + 8) dx \\
&= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_{-2}^{1} \\
&= \pi \left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 3 + 8 - \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} - 12 - 16 \right) \right] = \pi \left[\frac{67}{15} - \left(-\frac{284}{15} \right) \right] \\
&= \frac{117}{5} \pi \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

Question 5 **(3 + 4) + 3 = 10 points**

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$:

$$f(x) = \frac{a}{3x+1} + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{(3x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9x^2-21x+4}{(3x+1)(3x-1)^2} = \frac{a(3x-1)^2 + b(9x^2-1) + c(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2-21x+4 = 9ax^2 - 6ax + a + 9bx^2 - b + 3cx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2-21x+4 = (9a+9b)x^2 + (-6a+3c)x + (a-b+c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a+9b=9 & |:9 \\ -6a+3c=-21 & |:(-3) \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a-c=7 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ c=2a-7 \\ a-(1-a)+(2a-7)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ c=2a-7 \\ 4a=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-3 \\ c=2\cdot 3-7 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=-2 \\ c=-1 \\ a=3 \end{cases}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}, \quad f(x) = \frac{3}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} - \frac{1}{(3x-1)^2}$$

b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx = \int\left(\frac{3}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} - \frac{1}{(3x-1)^2}\right)dx \\ &= \int \frac{3}{3x+1}dx - 2\int\frac{1}{3x-1}dx - \int\frac{1}{(3x-1)^2}dx \\ &= \int \frac{3}{3x+1}dx - 2\cdot\frac{1}{3}\int\frac{3}{3x-1}dx - \left(-\frac{1}{3}\right)\int -\frac{3}{(3x-1)^2}dx \\ &= \ln|3x+1| - \frac{2}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1} + k \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Déterminons le réel k :

$$\begin{aligned} F(0)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln|1| - \tfrac{2}{3}\ln|-1| + \tfrac{1}{3}\cdot(-1) + k = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{3} + k = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalement, la primitive cherchée est définie sur $I = \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[$ par :

$$F(x) = \ln(3x+1) - \frac{2}{3}\ln(1-3x) + \frac{1}{9x-3} + \frac{4}{3}$$

2)

$$\int \frac{[1-2\ln(2x)]^3}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot[1-2\ln(2x)]^3 dx$$

Posons $u(x) = 1-2\ln(2x)$

$$u'(x) = -2\cdot\frac{2}{2x} = -\frac{2}{x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int -\frac{2}{x}\cdot[1-2\ln(2x)]^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{[1-2\ln(2x)]^4}{4}+k \qquad (k\in\mathbb{R})$$

$$= -\frac{[1-2\ln(2x)]^4}{8}+k \qquad (k\in\mathbb{R})$$