

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024**QUESTIONNAIRE**

Date :	03.06.24	Horaire :	08:15 - 11:00	Durée :	165 minutes	
Discipline :	MATHE - ANALY	Type :	écrit	Section(s) :	CD / CD-4LANG / CE-MATF	
					Numéro du candidat :	

Question théorique**2 + 2 = 4 points**

Démontrer les propriétés suivantes :

Si a est un réel strictement positif distinct de 1, alors,1) pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

2) pour tout réel x strictement positif et pour tout réel r ,

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Question 1**(4 + 4 + 4 + 3) + 5 = 20 points**1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -(x + 3)^2 e^{-3-x}$$

et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f .
- Montrer que la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-3-x}$$

Établir le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels.

- Calculer la dérivée seconde de f , étudier la concavité de \mathcal{C}_f et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
- Représenter graphiquement \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé du plan d'unité 2 cm, en indiquant tous les éléments importants (asymptotes, extrema et points d'inflexion éventuels).

2) Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au centième près de l'aire A de la partie du plan délimitée par \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$.

Question 2

4 + 4 + 6 = 14 points

1) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x - 1}{7x + 1} \right)^{7x}$$

2) Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$7^x - 7^{-x} = 7(1 + 7^{-x})$$

3) Résoudre l'inéquation suivante dans \mathbb{R} :

$$1 + \log_{\frac{1}{7}}(x + 2) \leq \log_7(2x - 1) - \log_{\sqrt{7}}(2 - x)$$

Question 3

5 + 3 = 8 points

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 3 - x - \ln \frac{x - 3}{x + 3}$$

et soit C_f sa courbe représentative.

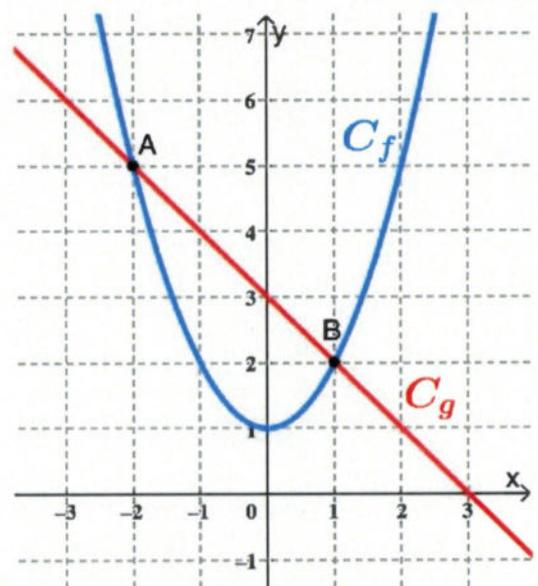
- 1) Déterminer le domaine de définition de f puis étudier le comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- 2) Étudier la position relative de C_f par rapport à ses asymptotes horizontales ou obliques éventuelles.

Question 4

4 points

En utilisant les informations de la figure, calculer la valeur exacte du volume \mathcal{V} du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface fermée délimitée par les représentations graphiques C_f et C_g des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 3 - x$$



Question 5

(3 + 4) + 3 = 10 points

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{9x^2 - 21x + 4}{(3x + 1)(3x - 1)^2}$$

a) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$:

$$f(x) = \frac{a}{3x + 1} + \frac{b}{3x - 1} + \frac{c}{(3x - 1)^2}$$

b) En déduire la primitive F de f qui vaut 1 en $x = 0$ sur un intervalle I à préciser.

2) Déterminer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{[1 - 2 \ln(2x)]^3}{x} dx$$