Corrigé

1

(1) $A(1;2;-3)$, $B(2;1;2)$, $C(3;1;3)$, $\vec{u}(2;-1;1)$, $\vec{v}(1;0;-1)$

a) $M(x,y,z) \in d \iff \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$

3

$$\begin{cases} x-1 = \alpha \cdot 1 \\ y-2 = \alpha \cdot (-1) \\ z+3 = \alpha \cdot 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = -3+5\alpha \end{cases}$$ équations paramétriques de d

b) $M(x,y,z) \in p \iff \overrightarrow{CM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

6

$$\begin{cases} x-3 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1 \\ y-1 = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 0 \\ z-3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\alpha + \beta & (1) \\ y = 1 - \alpha & (2) \\ z = 3 + \alpha - \beta & (3) \end{cases}$$ équations paramétrique de p

(2) : $\alpha = 1-y$ $\qquad$ $(2) \to (1)$: $x = 3 + 2(1-y) + \beta$

$\beta = x + 2y - 5$

$(1),(2) \to (3)$: $z = 3 + (1-y) - (x+2y-5)$

$\underline{p \equiv x + 3y + z - 9 = 0}$ éq. cartésienne de p

c)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ 3x - 4y + 3z = 10 \\ -2x + y + 3z = -5 \end{cases} \xrightarrow[E_3 + E_1]{2E_2 - 3E_1} \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ y - 3z = -1 \\ -2y + 6z = 2 \quad | : (-2) \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ y - 3z = -1 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$$ (système simplement indéterminé)

3 plans sécants en une droite d d'équations cartésiennes $\quad d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$

si nous posons $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $y = 3\alpha - 1$

et $x = 3\alpha + 2$

équations paramétriques de d : $\quad d \equiv \begin{cases} x = 3\alpha + 2 \\ y = 3\alpha - 1 \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

d passe par le point $D(2;-1;0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{w}(3;3;1)$

(2) a)

7

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x(x^2-4)} \leq \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2-4}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x(x^2-4)} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{3(x^2-4)}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x(x^2-4)} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{3(4-x^2)}$$

$$x(x^2-4) \geq 3(4-x^2)$$

$$x(x^2-4)+3(x^2-4)\geq 0$$

$$(x^2-4)(x+3)\geq 0 \qquad \text{racines : } x=-2 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=-3$$

x		-3		-2		2	
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x^2-4)(x+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\underline{S=[-3;-2]\cup[2,+\infty[}$$

b) $2\log_3(2x-1)-\log_3(5-2x)-\log_3 2=0$

$\boxed{\tfrac{2}{5}}$

* CE : $\begin{cases}2x-1>0\\5-2x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x<\frac{5}{2}\end{cases}$ $\qquad \underline{D=\left]\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right[}$

* $\log_3(2x-1)^2=\log_3(5-2x)+\log_3 2$

$$\log_3(2x-1)^2=\log_3 2(5-2x)$$

$$(2x-1)^2=2(5-2x)$$

$$4x^2-4x+1=10-4x$$

$$4x^2-9=0$$

$$x=-\frac{3}{2}\notin D \quad \text{ou} \quad x=\frac{3}{2}$$

$$\underline{S=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

3 a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$ $\qquad$ * CE : $\dfrac{3x+2}{x+1}>0$

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{3x+2}{x+1}$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$$\underline{D_f=]-\infty,-1[\cup]-\tfrac{2}{3},+\infty[}$$

$\boxed{\tfrac{3}{3}}$

* $f'(x)=\dfrac{1}{\frac{3x+2}{x+1}}\cdot\dfrac{3(x+1)-(3x+2)}{(x+1)^2}$

$$=\frac{x+1}{3x+2}\cdot\frac{3x+3-3x-2}{(x+1)^2}$$

$$\underline{f'(x)=\frac{1}{(3x+2)(x+1)}}$$

b) $f(x)=3^{2x+1}\cdot\log_3(2x+1)$ $\qquad$ * CE : $2x+1>0$

$$\underline{D_f=\left]-\tfrac{1}{2};+\infty\right[}$$

$\boxed{\tfrac{2}{5}}$

* $f'(x)=3^{2x+1}\cdot 2\cdot\ln 3\cdot\log_3(2x+1)$

$$+\,3^{2x+1}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot\frac{1}{\ln 3}$$

$$=3^{2x+1}\cdot 2\cdot\cancel{\ln}3\cdot\frac{\ln(2x+1)}{\cancel{\ln}3}+3^{2x+1}\cdot\frac{2}{(2x+1)\ln 3}$$

$$\underline{f'(x)=2\cdot 3^{2x+1}\left(\ln(2x+1)+\frac{1}{(2x+1)\ln 3}\right)}$$

4) a) $A = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 3e^x + 1}{e^x}\,dx = \int_0^1 (e^x - 3 + e^{-x})\,dx$

$= \left[e^x - 3x - e^{-x}\right]_0^1 = \left[\frac{e^{2x} - 3xe^x - 1}{e^x}\right]_0^1$

5

$= \frac{e^2 - 3e - 1}{e} - \frac{1 - 0 - 1}{1}$

$A = \frac{e^2 - 3e - 1}{e}$

b) $B = \int_1^e (x^2+1)\ln x\,dx$ $\quad f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x^2+1 \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

$B = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

6

$= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{9}x^3 + x\right]_1^e$

$= \left[\left(\frac{1}{3}e^3 + e\right)\cdot 1 - \frac{1}{9}e^3 - e\right] - \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right)\cdot 0 - \frac{1}{9} - 1\right]$

$= \frac{1}{3}e^3 + e - \frac{1}{9}e^3 - e + \frac{1}{9} + 1$

$B = \frac{2}{9}e^3 + \frac{10}{9}$

5) $y_p = x^2 - 3x \quad ; \quad y_d = x + 5$

* points d'intersection : $y_p = y_d$

$x^2 - 3x = x + 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad \Delta = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \; ; \; x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$

$\frac{2}{5}$

points d'intersection : $A(-1; 4)$ et $B(5; 10)$

* $Q = \int_{-1}^5 (y_d - y_p)\,dx = \int_{-1}^5 (5 + 4x - x^2)\,dx$

$= \left[5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^5 = \left(25 + 50 - \frac{125}{3}\right) - \left(-5 + 2 + \frac{1}{3}\right)$

$Q = 36$ u.a.