EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	20.09.23	*Durée :*	08:15 - 11:00	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 2	*Section(s) :*	CI		

Question 1 $(6\ \boldsymbol{points})$

Démontrer le théorème suivant :
« Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors

1. *la fonction $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a; b]$;*
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$
2. *la dérivée de F est f.*

Autrement dit, la fonction F est une primitive de f. »

Question 2 $(2 + 3 = \mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1. Démontrer la propriété suivante :
« $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, y \in \mathbb{R}, log_a(x^y) = y \cdot log_a(x)$ »
2. Paul a placé 15 000€ au taux annuel de 3,5%. Après combien d'années le capital de Paul aura-t-il au moins doublé pour la première fois ? Justifier !

Question 3 $(3 + 3 = \mathbf{6}\ \boldsymbol{points})$

Les parties suivantes sont indépendantes :

1. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t+3}{t-1}\right)^{2t-1}$$
2. Soit la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = [Arcsin(x)]^{\log_2(x^2)}$.
Calculer la dérivée f' de f sur $]0; 1[$.

Question 4 $(\mathbf{7}\ \boldsymbol{points})$

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\log_{\sqrt{3}}(x) - \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \leq \log_3(5x - 2)$$

Question 5 $(3 + (1 + 1 + 3) = \mathbf{8}\ \boldsymbol{points})$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’inéquation suivante :

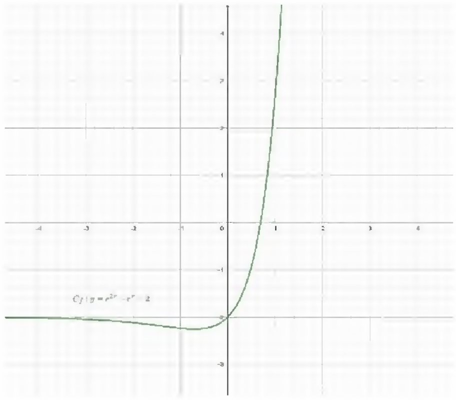
$$e^{2x} - e^{x} - 2 \geq 0$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(e^{2x}-e^{x})^2}{e^{2x}} - e^{x}(-1 + 3e^{-x})$

   a. Simplifier l’expression de $f(x)$.

   b. Utiliser les résultats du point 1. pour dresser le tableau de signe de $f(x)$.

   c. Calculer l’aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f , l’axe des abscisses et les droites d’équation $x = 0$ et $x = 1$.



Question 6 $(4 + 6 + 4 + 1 = \mathbf{15}\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et étudier les limites et asymptotes aux bornes de D_f. En déduire les équations d’asymptotes horizontales ou verticales éventuelles.
2. Montrer que C_f admet une asymptote oblique et étudier sa position relative par rapport à C_f.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité, la dérivée de f et dresser le tableau de variation complet de f.
4. Déterminer l’équation de la tangente au point d’abscisse 2.

Question 7 $((3 + 4) + (3 + 3) = \mathbf{13}\ \boldsymbol{points})$

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(3x-2)^2}$$

   a. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{2}{3}\}$:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{3x-2} + \frac{c}{(3x-2)^2}$$

   b. En déduire la primitive F de f sur $I = \left]0; \frac{2}{3}\right[$ telle que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

   Donner l’expression algébrique de $F(x)$ sur I sans valeur absolue.

2. Calculer :

$$\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\,dx \qquad\qquad \int \frac{1}{1+\cos(8x)}\,dx$$

Examen de fin d'études secondaires Sections B, C, D, E, F, I

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad \cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad \tan(\pi + x) = \tan x$ $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$