LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CI	*Date de l'épreuve :*	20.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:10
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève indique son numéro de candidat dans le tableau ci-dessus.
- L'élève répond à tous les exercices imposés.
- L'élève répond à exactement 1 question de chacune des deux parties au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seules les réponses correspondant aux questions choisies par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire :			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
Question 1	6	Théorie	x
Question 2	15	(In)équations avec logarithmes et exponentielles	x
Question 3	4	Limites	x
Question 4	15	Etude de fonction	x
Question 5	11	Calcul intégral	x
Partie au choix : Choisissez une question parmi ces deux et indiquez votre choix par un x			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
Question 6	9	Calcul d'aires	
Question 7	9	Tangentes à une courbe	

Partie obligatoire :

Question 1 : $(6\ \boldsymbol{points})$

Démontrez le théorème suivant :

« Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors

1. *la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $[a;b]$;*
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$
2. *la dérivée de F est f.*

Autrement dit, la fonction F est une primitive de f. »

Question 2 : $(7 + 8 = \mathbf{15}\ \boldsymbol{points})$

Résolvez dans $\mathbb{R}$:

1. $8 \cdot 0{,}5^{2x} + 6 \cdot 0{,}5^{x} \geq 3 + 0{,}5^{-x}$
2. $2\log_{0,5}(x^2 - 1) + \log_2(\sqrt{3}x + \sqrt{5}) + 2\log_4(\sqrt{3}x - \sqrt{5}) = 0$

Question 3 : $(\mathbf{4}\ \boldsymbol{points})$

Calculez la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{4}{x}}}$

Question 4 : $(5 + 3 + 4 + 3 = \mathbf{15}\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 8\ln x - 4\ln^2 x$$

1. Déterminez le domaine de définition D_f de f, étudiez les limites aux bornes de D_f et déterminez les asymptotes verticales, horizontales et obliques éventuelles ;
2. Déterminez le domaine de dérivabilité et la dérivée de f (on montrera que $f'(x) = \frac{8-8lnx}{x}$) ; dressez le tableau de variation de f et précisez les extrema éventuels ;
3. Déterminez le domaine de dérivabilité et la dérivée seconde de f ; dressez le tableau de concavité et précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels ;
4. Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé *(unité : 1cm)* en indiquant tous les éléments importants.

Question 5 : $(5 + 4 + 2 = \mathbf{11}\ \boldsymbol{points})$

1. Calculez $I = \int e^{-x}\cos(2x)\, dx$.
2. Calculez $J = \int_0^1 \frac{4x-1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$.
3. Trouvez la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-2)e^{3x^2-4x+1}$ telle que $F(0) = e$.

Questions aux choix :
(Choisissez une question parmi les questions 6 et 7 et notez votre choix sur la 1ère page)

Question 6 : $(2 + 7 = \mathbf{9}\ \boldsymbol{points})$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\ln^2 x - 4lnx$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Etudiez le signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminez l'aire comprise entre l'axe *(0x)* et la courbe de f.

Question 7 : $(5 + 4 = \mathbf{9}\ \boldsymbol{points})$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\ln^2 x - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Etudiez la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.
2. Combien y a-t-il de tangentes à la courbe de f passant par *A (0 ;−2)* ?

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$