LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CI	*Date de l'épreuve :*	30.05.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:10
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève indique son numéro de candidat dans le tableau ci-dessous.
- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

		Numéro du candidat :	
Partie au choix : (14 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un x.			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
1	14	Question théorique avec applications	
2	14	Question théorique avec applications	
Partie obligatoire (46 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
3	20	Étude de fonction	x
4	8	Calcul de primitives et d'intégrales	x
5	9	Signe d'une fonction et calcul d'aire	x
6	9	Comportement asymptotique d'une fonction et calcul d'aire	x

Partie au choix :
Choisir 1 question parmi les questions 1 et 2 et indiquer le choix sur la page de garde.

Question 1 *((3+2+2)+3+4=14P)*

1) Démontrer les propriétés suivantes :

   a) $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

   b) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$
$$\log'_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

   c) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R},$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)\ .$$

2) En utilisant les propriétés du point 1), montrer que
$$\int_0^1 10^x \,\mathrm{d}x = \log(e^9)\ .$$

3) Madame X place une somme de 100.000 € à un taux annuel de 3,00 % et Monsieur Y place une somme de 50.000 € à un taux mensuel de 0,5 %. Après combien d'années, le capital de Monsieur Y dépassera-t-il celui de Madame X sachant que les intérêts composés sont payés à la fin de chaque année ?

Question 2 *((2+4)+5+3=14P)*

1) Démontrer les propriétés suivantes :

   a) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R},$
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

   b) Si F et G sont des primitives de f sur I et I est un intervalle inclus dans le domaine de continuité de f, alors il existe une constante C telle que $F(x) - G(x) = C$, pour tout réel x de I.

2) Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x}$.

   a) Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(e) = 3$.

   b) Montrer par un calcul de dérivée que la fonction G définie sur I par $G(x) = \ln(\sqrt{e} \cdot x^3)$ est également une primitive de la fonction f.

   c) Déterminer la constante C telle que $F(x) - G(x) = C$ pour tout réel x de I.

3) Un investisseur achète une voiture à 80.000 € et il estime que cette voiture perd chaque année 13 % de sa valeur. Après combien d'années, la valeur de la voiture sera-t-elle inférieure à la moitié du prix d'achat ?

Partie obligatoire

Question 3 *((4+3+4+3)+6=20P)*

1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (5 - x^2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

   a) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.

   b) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x^2 - 4x - 5)$ et en déduire les variations de f. On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près des extrema éventuels.

   c) Calculer la dérivée seconde de f, dresser le tableau de concavité et déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

   d) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm en indiquant tous les éléments déterminés aux points précédents.

2) Étudier le signe de $f(x)$, puis calculer une valeur exacte de l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Question 4 *(4+4=8P)*

1) Calculer la valeur exacte de l'intégrale définie suivante :

$$K = \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \frac{100x + 50}{25x^2 + 1}\, \mathrm{d}x\,.$$

2) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \sin^2 x - \tan^2 x$. Déterminer la primitive G de la fonction g qui prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$.

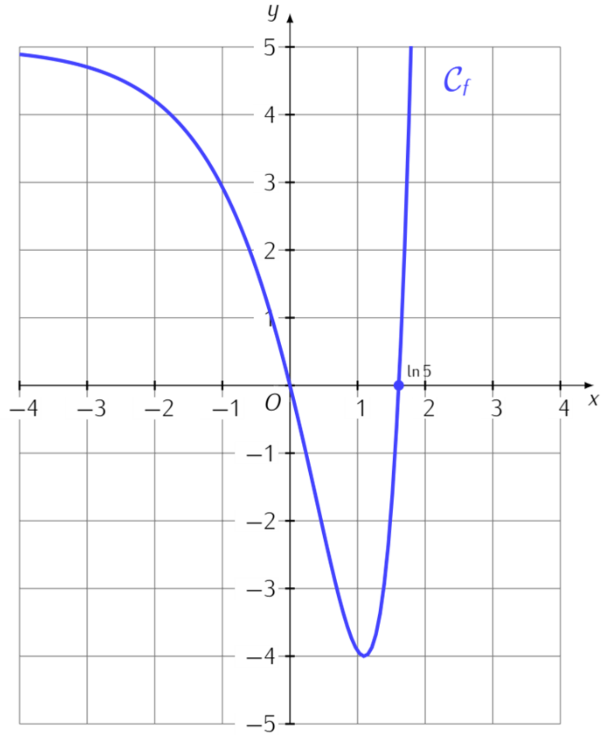
Question 5 *(4+(2+3)=9P)*

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :
$$e^{2x} - 6e^{x} + 5 \leq 0.$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (e^{x} - 2)^2 - \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{x}}$$
et soit C_f sa courbe représentative.

   a) Réduire l'expression de $f(x)$ et utiliser les résultats du point 1) pour étudier le signe de $f(x)$.

   b) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \ln 5$.
   Pour le calcul d'aire, vous pouvez utiliser les informations de la figure.

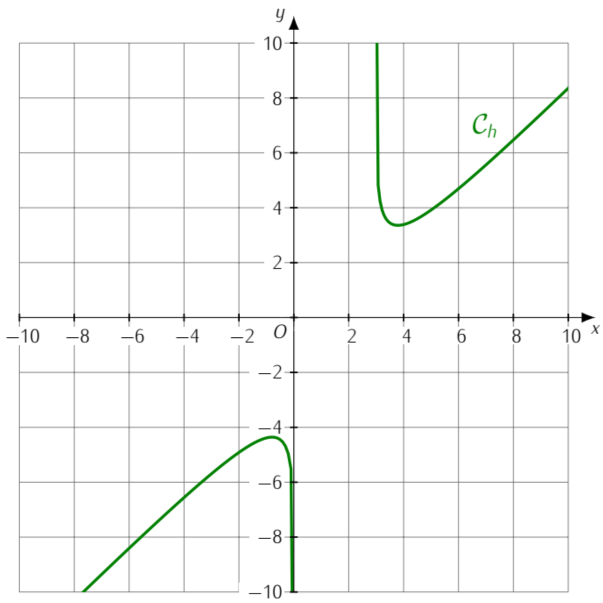


Question 6 *(5+4=9P)*

Soit h la fonction définie par :
$$h(x) = x - 2 + \ln\frac{x}{x-3}$$
et soit C_h son graphe dans un repère orthonormé.

1) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de la fonction h.

2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 7$.
Pour le calcul d'aire, vous pouvez utiliser les informations de la figure.



Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\quad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad \sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad \cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\quad \tan(\pi + x) = \tan x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\quad \cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\quad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$