LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**I**	*Durée de l'épreuve :* 3h *Date de l'épreuve :* 20/05/2021

Question 1 $(3+3=\boldsymbol{6\ points})$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ log_a(x) = \dfrac{log_b(x)}{log_b(a)}$
2. Si F et G sont des primitives de f sur I et I est un intervalle inclus dans le domaine de continuité de f, alors il existe une constante C telle que $F(x) - G(x) = C$, pour tout réel x de I.

Question 2 $((4{,}5+4{,}5)+2=\boldsymbol{11\ points})$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a) $\dfrac{4\cdot 4^x - 4\cdot 2^x + 4^0}{0{,}5^x - 3} > 0$ b) $\log_{0,2}(x^3) \leq -\log_{\sqrt{5}}(x-2)$

2. Au 1[ier] janvier, 15000€ sont placés à un taux de 4%. Sachant que les intérêts sont payés à la fin de chaque année, après combien d'années le capital investi aura-t-il doublé ?

Question 3 $(\boldsymbol{4\ points})$

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{3y+1}{3y-4}\right)^{y-1}$$

Question 4 : $(3+2+4+1{,}5+3{,}5+6=\boldsymbol{20\ points})$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-x}\cdot(-2x^2+x+1)$$

Déterminer :

1. le domaine de définition D_f de f, et étudier les limites et asymptotes aux bornes de D_f ;
2. $D_{f'}$ et montrer que $f'(x) = e^{-x}x(2x-5)$; dresser le tableau de variation complet de f et préciser les extrema éventuels en indiquant des valeurs approchées à 10^{-2} près ;
3. $D_{f''}$ et la dérivée seconde de f ; dresser le tableau de concavité et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels en indiquant des valeurs approchées à 10^{-2} près ;
4. les points d'intersection de C_f avec les axes des abscisses ;
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé *(unité : 1cm)* en indiquant tous les éléments importants ;
6. Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1\ et\ x = 3$.

Question 5 $((4+3)+4=\mathbf{11}\ \boldsymbol{points})$

1. Calculer :

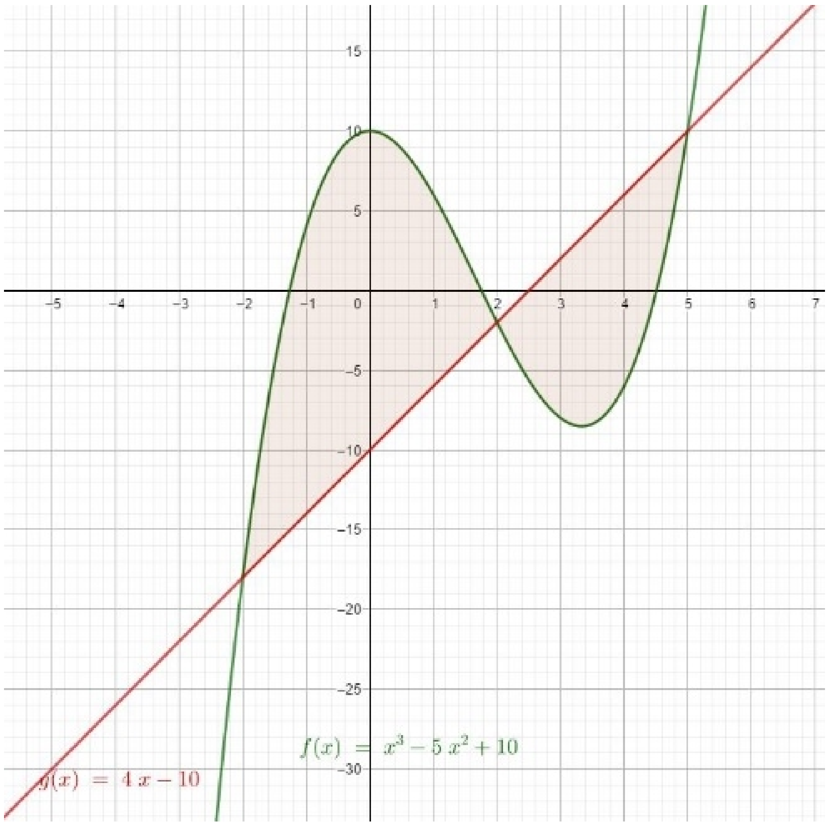
   a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}} \frac{\sin(4y)}{1+\sin^2(2y)}\,dy$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\ln(x)\cdot(2x-3)$.
   Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en $x=3$.

Question 6 $(5+3=\mathbf{8}\ \boldsymbol{points})$

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x^2+10$ et $g(x)=4x-10$.

1. Déterminer algébriquement la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.
2. Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par celles-ci.



Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$