LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**I**	*Durée de l'épreuve :* 3h *Date de l'épreuve :* 17/09/2020

Théorie : **((2 + 2,5) + 3,5 = 8 pts)**

1) Démontrez :
a) $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$.
b) $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$ et en particulier $\forall y \in \mathbb{R}_0^+, log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -log_a(y)$
2) Démontrez :
Si F et G sont des primitives de f sur I et I est un intervalle inclus dans le domaine de continuité de f, alors il existe une constante C telle que $F(x) - G(x) = C$, pour tout réel x de I

Question 1: **(2 + 2 + 1 +3 + 5 + 2 + 3 + 3 = 21 pts)**

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = -x^2 ln\left(\frac{x^4}{e^2}\right)$ sur $\mathbb{R}_0$ et par $f(0) = 0$. Soit G_f son graphe dans un repère orthonormé.

1) Etudiez la continuité de *f* en *x=0*.
2) Etudiez la dérivabilité de *f* en *x=0*. Faites une interprétation graphique du résultat.
3) Etudiez la parité de *f.*
4) Déterminez les limites en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$ et étudier l'existence d'asymptotes au graphe G_f.
5) Etudiez le sens de variation de *f* (on montrera que , $f'(x) = -2x\left(ln\frac{x^4}{e^2} + 2\right)$).
6) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de G_f avec les axes du repère.
7) Tracez G_f dans un repère orthonormé du plan d'unité 2 cm.
8) Calculez l'aire A de la partie du plan délimitée par G_f, l'axe des *x* et les droites d'équation $x = \sqrt{e}$ *et* $x = e$.

Question 2 : **(2 + 3 = 5 pts)**

1) Pierre dépose son argent sur un compte d'épargne à un taux annuel de 3%. Après combien d'années son capital aura-t-il triplé ? Arrondissez le résultat à 10^{-2} près.
2) Marie a déposé son argent sur un compte d'épargne sur cinq ans au taux annuel de 5%, puis pendant 5 ans au taux annuel de 2%. Quel est le taux annuel équivalent sur dix ans à ces deux taux annuels successifs ? Donnez le résultat sous forme de pourcentage et arrondissez à 10^{-2} près.

Question 3 : **(5 + 7 = 12 pts)**

Résolvez dans $\mathbb{R}$:

1) $\left(\pi^x - 4arcsin^2(-1)\right) \cdot (2 - 0{,}5^{2x}) \geq 0$

2) $4\log_{0,25}(2 - x) - \log_{0,5}(2 + 3x) \geq 3\log_{\frac{1}{8}}(x + 2)$

Question 4 : **((2 + 3) + 5 + 4) =14 pts)**

Intégrales et primitives

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(x+2)^2}{4x^2+1}$
   a) Déterminez les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f(x) = a + \frac{bx}{4x^2 + 1} + \frac{c}{4x^2 + 1}$$
   b) Déterminez la primitive F de f telle que *F(0)=1.*
2) Déterminez l'intégrale suivante : $I = \int \cos(-2x)\, e^x dx$.
3) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{6}{2x+1}$ et $g(x) = -4x^2 + 6$ représentées ci-dessous :

Calculez, dans un repère orthonormé de l'espace, le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions f et g, sachant que C_f et C_g se coupent en $x = 0$ *et* $x = 1$.