LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**I**	*Durée de l'épreuve :* 3h *Date de l'épreuve :* 28/05/2020

Question 1 : $(\mathbf{6\ points})$

Démontrer le théorème suivant :

« Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors

1. *la fonction* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est dérivable sur* $[a;b]$ *;*
   $$x\to\int_a^x f(t)dt$$
2. *la dérivée de* F *est* f*.*

Autrement dit, la fonction F *est une primitive de* f*. »*

Question 2 : $(5+8=\mathbf{13\ points})$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2^x-3}\geq 0$
2. $\log_{\sqrt{2}}(1-x)-\log_{0,5}(2+3x)\leq\log_2(x+2)$

Question 3 : $(5+3=\mathbf{8\ points})$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{Arctan}\,(t^2)}{\log(\cos t)}$
2. $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1-\frac{2}{u}\right)^{\frac{u}{3}}$

Question 4 : $(9+5+3+3=\mathbf{20\ points})$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-1+\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$$

Déterminer :

1. le domaine de définition D_f de f, et étudier les limites et asymptotes aux bornes de D_f; en cas d'A.H. ou A.O., déterminer également la position relative de C_f par rapport à cette A.H. ou A.O. ;
2. le domaine de dérivabilité et la dérivée de f ; dresser le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels ;
3. la dérivée seconde de f ; dresser le tableau de concavité et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels ;
4. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé *(unité : 1cm)* en indiquant tous les éléments importants.

Question 5 : $(3 + 4 = \mathbf{7}\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(2x-1)^2}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;\frac{1}{2}\}$:
$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{(2x-1)^2}$$
2. En déduire la primitive F de f sur $I = \left]0;\frac{1}{2}\right[$ telle que $F\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

   Donner l'expression algébrique de $F(x)$ sans valeur absolue.

Question 6 : $(\mathbf{6}\ \boldsymbol{points})$

Voici la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)e^x$.

Calculer l'aire de la surface coloriée sur la figure.