

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	19.05.23	Durée :	08:15 - 11:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	Section(s) :	CD / CD-4LANG

Réponse 1

4 points

Proposition 3 pp. 86–87 du manuel *Espace Math 66*. 4PTS

Réponse 2

5 + 3 + 5 + 3 = 16 points

(a) * Imposons les C.E. :

$$\cdot x > 0$$

$$\cdot 1 + \ln(x) \neq 0 \iff \ln(x) \neq -1 \iff \ln(x) \neq \ln(e^{-1}) \xrightarrow{\ln \text{ bij.}} x \neq \frac{1}{e}$$

Donc : $D_f =]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ 1PT

* D'une part :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \boxed{0} \quad \text{0,5 PTS} \quad \text{" } \frac{0^+}{-\infty} \text{"}$$

* D'autre part, en notant que $1 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \xrightarrow{\ln \text{ bij.}} x > \frac{1}{e}$: 0,5PTS

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$1 + \ln(x)$			$-$	0	$+$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^-} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \boxed{-\infty} \quad \text{0,5 PTS} \quad \text{" } \frac{\frac{1}{e}}{0^-} \text{"}$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \boxed{+\infty} \quad \text{0,5 PTS} \quad \text{" } \frac{\frac{1}{e}}{0^+} \text{"}$$

La droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est A.V. à $\mathcal{C}_f$.

* Finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \ln(x)} && \text{" } \frac{+\infty}{+\infty} \text{" F.I.} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \\ &= \boxed{+\infty} \quad \text{1PT} \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas d'A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. Déterminons si $\mathcal{C}_f$ admet une A.O. au voisinage de $+\infty$ grâce aux formules de Cauchy :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 + \ln(x))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \ln(x)} = \boxed{0} \quad \text{" } \frac{1}{+\infty} \text{"}$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet donc pas d'A.O.D. (mais une B.P.D. de direction (Ox)). 1PT

(b) * On a : $D_{f'} (= \text{dom}_d(f)) = D_f$ 0,5 PTS

* $\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + \ln(x)) - \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{(1 + \ln(x))^2} = \frac{\cancel{x} + \ln(x) - \cancel{1}}{(1 + \ln(x))^2} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}}_{>0} \quad \text{1 PT}$$

* Comme $\ln(x) > 0 \iff \overset{\text{ln bij.}}{x} > 1$, le tableau de variation de f s'ensuit : 1,5 PTS

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	
$f(x)$	0	$+\infty$	MIN. 1	$+\infty$

* La fonction f admet un minimum local de 1 en $x = 1$.

(c) * $\forall x \in D_{f''} = D_{f'}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (1 + \ln(x))^2 - \ln(x) \cdot 2 \cdot (1 + \ln(x)) \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln(x))^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \cancel{(1 + \ln(x))} \cdot [1 + \ln(x) - 2 \ln(x)]}{(1 + \ln(x))^4} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x (1 + \ln(x))^3} \quad \text{2 PTS} \end{aligned}$$

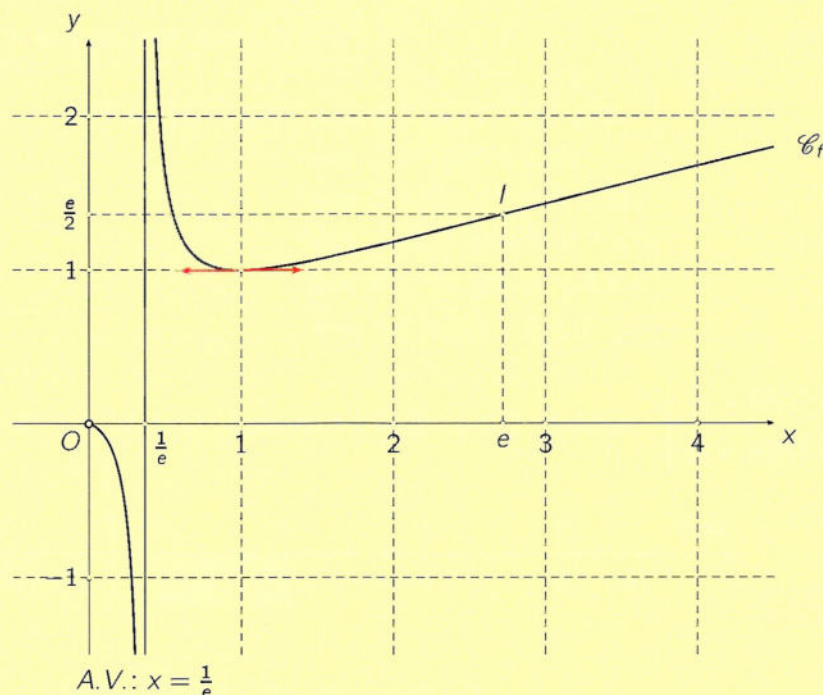
* Comme $1 - \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff \overset{\text{ln bij.}}{x} < e$, le tableau de concavité de $\mathcal{C}_f$ en découle : 2,5 PTS

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$	
$1 - \ln(x)$		+	+	0	-
x	0	+	+		+
$(1 + \ln(x))^3$		-	0	+	+
$f''(x)$		-	+	0	-
$\mathcal{C}_f$		$\cap$	$\cup$		$\cap$

* Le point $I(e; \frac{e}{2})$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. 0,5 PTS

(d) * Tableau de valeurs (à titre indicatif) :

x	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	1	1,5	2	2,5	3	4
$f(x)$	-0,08	-0,33	-1,47	1,63	1,23	1,09	1	1,07	1,18	1,30	1,43	1,68

★ Représentons f : 3PTS

Réponse 3

3 + 3 = 6 points

(a) On a :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3(2^x - 3)}{x} && \text{"} \frac{+\infty}{+\infty} \text{" F.I.} \\
 & \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^x - 3} \cdot \frac{1}{\ln(3)} \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{1} \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \cdot \frac{2^x}{2^x - 3}}{1} \\
 & = \boxed{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} \quad (= \log_3(2)) && \text{2PTS}
 \end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^x - 3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \cdot \ln(2)}{2^x \cdot \ln(2)} = 1 \quad \text{1PT} \quad \text{"} \frac{+\infty}{+\infty} \text{" F.I.}$$

(b) C.E. :

$$\left. \begin{aligned} & x \geq 0 \\ & \sqrt{x} > 0 \\ & \frac{1}{x} > 0 \iff x > 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} & x > 0 \end{aligned} \right\} \quad D_f = D_{f'} =]0; +\infty[\quad \text{0,5PTS}$$

Écrivons f sous la forme :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(\sqrt{x})} = e^{\ln(\sqrt{x}) \cdot \ln(\frac{1}{x})} = e^{\frac{1}{2} \ln(x) \cdot (-\ln(x))} = e^{-\frac{1}{2} \ln^2(x)} \quad \text{1PT}$$

 $\forall x \in D_{f'} :$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln^2(x)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = \boxed{-\frac{\ln(x)}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(\sqrt{x})}} \quad \text{1,5PTS}$$

Réponse 4

5 + 5 = 10 points

(a) C.E. : $\underbrace{2^{6-2x}}_{>0} \geq 0$, toujours vrai, donc $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in D : \quad 2^{x+2} + \sqrt{2^{6-2x}} &\leq 33 \iff 2^{x+2} + (2^{6-2x})^{\frac{1}{2}} \leq 33 \\
 &\iff 2^{x+2} + 2^{3-x} \leq 33 \\
 &\iff 2^x \cdot 2^2 + 2^3 \cdot 2^{-x} \leq 33 \\
 &\iff 4 \cdot 2^x - 33 + 8 \cdot 2^{-x} \leq 0 \quad | \cdot 2^x > 0 \\
 &\iff 4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0 \\
 &\iff 4y^2 - 33y + 8 \leq 0 \quad \boxed{2 \text{ PTS}}
 \end{aligned}$$

en posant : $y = 2^x > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 961 = 31^2$, et donc :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{33-31}{8} = \frac{1}{4} \\ y_2 = \frac{33+31}{8} = 8 \end{cases}$$

y	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	8	$+\infty$
$4y^2 - 33y + 8$			+	0	-

$\boxed{1,5 \text{ PTS}}$

D'où :

$$\begin{aligned}
 4y^2 - 33y + 8 \leq 0 &\iff \frac{1}{4} \leq y \leq 8 \\
 &\iff 2^{\log_2(\frac{1}{4})} \leq 2^x \leq 2^{\log_2(8)} \quad | \exp_2 \text{ bij. } \nearrow \\
 &\iff \log_2(2^{-2}) \leq x \leq \log_2(2^3) \\
 &\iff -2 \leq x \leq 3 \quad \boxed{1,5 \text{ PTS}}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbb{S} = [-2; 3]$$

(b) C.E. :

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} > 0 \end{cases} \quad x+1 > 0 \iff x > -1 \\ &\cdot 5-x^2 > 0 \iff (\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x) > 0 \iff x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[, \text{ avec :} \end{aligned} \right\} \quad D =]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[\quad \boxed{1,5 \text{ PTS}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$		
$5-x^2$		-	0	+	0	-

$$\cdot 2x+3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$$

 $\forall x \in D :$

$$\begin{aligned}
 \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) - \log_5(5-x^2) &= \log_{\frac{1}{5}}(2x+3) \\
 &\iff \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_5(x+1)}{\log_5(\sqrt{5})} - \log_5(5-x^2) = \frac{\log_5(2x+3)}{\log_5(\frac{1}{5})} \\
 &\iff \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_5(x+1)}{\frac{1}{2}} - \log_5(5-x^2) = \frac{\log_5(2x+3)}{-1} \\
 &\iff \log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = \log_5(5-x^2) \\
 &\iff \log_5[(x+1)(2x+3)] = \log_5(5-x^2) \quad | \log_5 \text{ bij.} \\
 &\iff 2x^2 + 5x + 3 = 5 - x^2 \\
 &\iff 3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \boxed{2,5 \text{ PTS}}
 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = 49 = 7^2$, donc :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5-7}{6} = -2 \notin D \quad \boxed{0,5 \text{ PTS}} \\ x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3} \in D \quad \boxed{0,5 \text{ PTS}} \end{cases}$$

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Réponse 5

(4 + 3) + 4 = 11 points

(a) (i) Vérifions tout d'abord que le dénominateur de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$(x-2)(x+1)^2 = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2 \quad \boxed{0,5 \text{ PTS}}$$

 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \quad | \cdot (x-2)(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 = a(x+1)^2 + b(x-2)(x+1) + c(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 = ax^2 + 2ax + a + bx^2 + bx - 2bx - 2b + cx - 2c$$

$$\Leftrightarrow 0x^2 + 4x + 1 = (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + (a-2b-2c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ 2a-b+c = 4 \\ a-2b-2c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a & (E_1) \\ c = -2a + b + 4 & (E_2) \\ a - 2b - 2c = 1 & (E_3) \end{cases} \quad \boxed{2,5 \text{ PTS}}$$

$$\text{De } (E_1) \text{ dans } (E_2) \text{ dans } (E_3) : a - 2(-a) - 2(-3a + 4) = 1 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{En remplaçant dans } (E_1), \text{ on a : } b = -1, \text{ puis dans } (E_2) : c = 1 \quad \boxed{1 \text{ PT}}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

(ii) D'où :

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \boxed{1,5 \text{ PTS}}$$

Déterminons le réel k :

$$F(0) = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_0 - \frac{1}{1} + k = \ln(2) \Leftrightarrow k = 1 \quad \boxed{0,5 \text{ PT}}$$

Finalement, sur $I =]-1; 2[$: 0,5 PTS

$$F(x) = \ln(2-x) - \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1 \quad \boxed{0,5 \text{ PTS}}$$

(b) On a :

$$\int \frac{(1 - \ln(x))^2}{x \cdot \ln(x)} dx = \int \frac{1 - 2 \ln(x) + \ln^2(x)}{x \cdot \ln(x)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx - \int \frac{2 \ln(x)}{x \cdot \ln(x)} dx + \int \frac{\ln^2(x)}{x \cdot \ln(x)} dx \quad \boxed{2 \text{ PTS}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$$

$$= \ln|\ln(x)| - 2 \ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2} + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \boxed{2 \text{ PTS}}$$

Réponse 6

6 points

Comme f change de signe en -1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \int_{-e}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx && \boxed{0,5 \text{ PTS}} \\ &= -[F(x)]_{-e}^{-1} + [F(x)]_{-1}^{-\frac{1}{e}} \\ &= -F(-1) + F(-e) + F\left(-\frac{1}{e}\right) - F(-1) \\ &= F(-e) + F\left(-\frac{1}{e}\right) - 2 \cdot F(-1) \end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur $I = [-e; -\frac{1}{e}]$. Déterminons une expression de F (avec $k = 0$) en primitivant par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln(x^2) & u'(x) = \frac{2}{x} = \frac{2}{x^1} \\ v'(x) = \frac{1}{2}x & v(x) = \frac{1}{4}x^2 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{4}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{1}{4}x^2(\ln(x^2) - 1)} \quad \boxed{3 \text{ PTS}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= F(-e) + F\left(-\frac{1}{e}\right) - 2 \cdot F(-1) \\ &= \frac{1}{4}e^2 \underbrace{(\ln(e^2) - 1)}_2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{e^2} \underbrace{(\ln(e^{-2}) - 1)}_{-2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \underbrace{(\ln(1) - 1)}_0 \\ &= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{e^4 + 2e^2 - 3}{4e^2} \text{ u.a.}} \quad \boxed{2,5 \text{ PTS}} \end{aligned}$$

Remarque : sur $I = [-e; -\frac{1}{e}]$, on peut également écrire f sous la forme : $f(x) = x \cdot \ln(-x)$

Réponse 7

7 points

Comme $\mathcal{G}_g$ est au-dessus de $\mathcal{G}_f$ sur l'intervalle $[-1; 1]$, le volume cherché est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \int_{-1}^1 (g^2(x) - f^2(x)) dx = \pi \int_{-1}^1 ((2 - x^2) \cdot e^{-x} - e^{-x}) dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) \cdot e^{-x} dx \quad \boxed{1,5 \text{ PTS}}$$

Intégrons par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 1 - x^2 & u'(x) = -2x \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\mathcal{V} = \pi \left([- (1 - x^2) \cdot e^{-x}]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 x \cdot e^{-x} dx \right) \quad \boxed{1,5 \text{ PTS}}$$

Intégrons de nouveau par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \nu &= \pi \left([(x^2 - 1) \cdot e^{-x}]_{-1}^1 - 2 \left([-x \cdot e^{-x}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right) \right) \quad \boxed{1,5 \text{ PTS}} \\ &= \pi \left([(x^2 - 1) \cdot e^{-x}]_{-1}^1 + 2 [x \cdot e^{-x}]_{-1}^1 + 2 [e^{-x}]_{-1}^1 \right) \\ &= \pi [(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x}]_{-1}^1 \\ &= \pi [(x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x}]_{-1}^1 \\ &= \pi [(x + 1)^2 \cdot e^{-x}]_{-1}^1 \\ &= \pi \left(\frac{4}{e} - 0 \right) \\ &= \boxed{\frac{4\pi}{e} \text{ u.v.}} \quad \boxed{2,5 \text{ PTS}} \end{aligned}$$