

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	19.05.23	Durée :	08:15 - 11:00	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse		Section(s) :	CD / CD-4LANG	

Question 1

4 points

Démontrer la proposition suivante :

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors, pour tout x de $[a; b]$, $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. En particulier :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \text{ noté } [F(t)]_a^b$$

Question 2

5 + 3 + 5 + 3 = 16 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln(x)}$$

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f , puis étudier le comportement asymptotique de f aux bornes du domaine.
- (b) Indiquer le domaine de dérivabilité de f , et montrer que la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$$

Dresser le tableau de variation de f en précisant l'extremum (les extrema) éventuel(s).

- (c) Calculer la dérivée seconde de f après avoir indiqué son domaine, puis dresser le tableau de concavité de $\mathcal{C}_f$ en déterminant les coordonnées exactes du (des) point(s) d'inflexion éventuel(s).
- (d) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Question 3

3 + 3 = 6 points

- (a) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3(2^x - 3)}{x}$

- (b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(\sqrt{x})}$

Déterminer le domaine de définition de f , le domaine de la fonction dérivée f' , et une expression réduite de $f'(x)$.

Question 4

5 + 5 = 10 points

(a) Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$2^{x+2} + \sqrt{2^{6-2x}} \leq 33$$

(b) Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) - \log_5(5-x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(2x+3)$$

Question 5

(4 + 3) + 4 = 11 points

(a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ par : $f(x) = \frac{4x+1}{x^3-3x-2}$ (i) Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(ii) En déduire la primitive F de f telle que $F(0) = \ln(2)$ sur un intervalle I à préciser.

(b) Déterminer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{(1 - \ln(x))^2}{x \cdot \ln(x)} dx$$

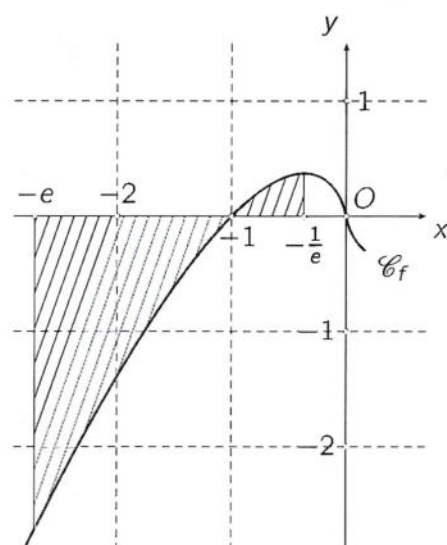
Question 6

6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \ln(x^2)$$

À l'aide de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans le repère orthonormé ci-contre, calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = -e$ et $x = -\frac{1}{e}$.



Question 7

7 points

Considérons les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{2-x^2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Elles sont représentées par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le repère orthonormé ci-dessous. En s'appuyant sur les informations du graphique, calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

