EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
CORRIGÉ							
Date :	19.09.24		*Horaire :*	08:15 - 11:00		*Durée :*	165 minutes
Discipline :	MATHE - ANALY	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG		
					Numéro du candidat :		

Question 1 **5+4=9P**

1) Démonstrations :

a) Soit $\log_a x = y$ et $\log_a(x^r) = z$.

On a :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$
$$\log_a(x^r) = z \Leftrightarrow x^r = a^z.$$

Alors :

$$a^z = x^r = (a^y)^r = a^{yr}$$

Donc :

$$z = yr$$

Finalement :

$$\log_a(x^r) = z = ry = r\log_a x$$

b) Soit $\log_a x = y$ et $\log_b x = z$.

On a :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$
$$\log_b x = z \Leftrightarrow x = b^z.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\log_b x &= \log_b(a^y)\\ &= y\cdot\log_b a\\ &= \log_a x\cdot\log_b a\end{aligned}$$

Finalement :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

2) $\log(x-1) - \log_{0,1} 5 \le \log_{100}(x^2)$

Conditions d'existence :

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Domaine de résolution : $D =]1;+\infty[$

$\forall x \in D$:

$$\begin{aligned}&\log(x-1) - \log_{0,1} 5 \le \log_{100}(x^2)\\ \Leftrightarrow\ &\log(x-1) - \frac{\log 5}{\log 0{,}1} \le \frac{\log(x^2)}{\log 100}\\ \Leftrightarrow\ &\log(x-1) + \log 5 \le \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log x\\ \Leftrightarrow\ &\log\big(5(x-1)\big) \le \log x\\ \Leftrightarrow\ &5(x-1) \le x \qquad (\log\ \text{bij.}\nearrow)\\ \Leftrightarrow\ &5x - 5 \le x\\ \Leftrightarrow\ &4x \le 5\\ \Leftrightarrow\ &x \le \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$S = \left]1;\frac{5}{4}\right]$

Question 2 **(3+4+4+3)+5=19P**

1) La fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$$

a) <u>Domaines et limites aux bornes :</u>

- *Conditions d'existence :*

$x > 0$ et $x \neq 0$

$\mathrm{dom} f =]0; +\infty[= \mathrm{dom} f'$

- *Limite en 0^+ :*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln(x) + 1 \to -\infty}{x \quad \to 0^+} = -\infty$$

$\mathrm{AV} \equiv x = 0$

- *Limite en $+\infty$:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x) + 1 \to +\infty}{x \quad \to +\infty} \text{ f.i.}$$

$$\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x \to +\infty} = 0$$

$\mathrm{AHD} \equiv y = 0$

b) <u>Fonction dérivée et variations :</u>

$\forall x \in \mathrm{dom} f'$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2\ln(x) + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$$

- *Signe de $f'(x)$:*

$$f'(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\ln(x)}{\underbrace{x^2}_{>0}} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -2\ln(x) \geq -1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} \quad (\text{exp bij.} \nearrow)$$
$$\Leftrightarrow x \leq \underbrace{\sqrt{e}}_{\approx 1{,}65}$$

- *Tableau des variations*

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$ (max)	$\searrow$	0

Maximum global :

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2 \cdot \ln(\sqrt{e}) + 1}{\sqrt{e}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\sqrt{e}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}21$$

c) <u>Dérivée seconde et concavité :</u>

$\forall x \in \mathrm{dom} f'' = \mathrm{dom} f'$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (1 - 2\ln(x)) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x - 2x + 4x\ln(x)}{x^4} = \frac{4x\ln(x) - 4x}{x^4} = \frac{4x(\ln(x) - 1)}{x^4} = \frac{4(\ln(x) - 1)}{x^3}$$

- *Signe de $f''(x)$:*

$$
\begin{aligned}
& f''(x) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4(\ln(x)-1)}{\underbrace{x^3}_{>0}} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(x) - 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(x) \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq e \ \ (\text{exp bij.} \nearrow)
\end{aligned}
$$

- *Tableau de concavité*

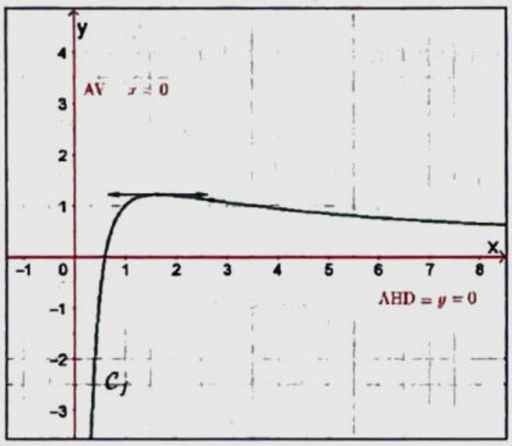
x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\mathcal{C}_f$	$\|$		$\left(e;\frac{3}{e}\right)$ PI		

$$
\begin{aligned}
f(e) &= \frac{2\cdot\ln(e)+1}{e} \\
&= \frac{3}{e} \approx 1{,}10
\end{aligned}
$$

Coordonnées du point d'inflexion :

$$I\left(e;\frac{3}{e}\right)$$

- Représentation graphique :



2) Signe de $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\ln(x)+1}{\underbrace{x}_{>0}} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\ln(x) + 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\ln(x) \geq -1 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x \geq e^{-\frac{1}{2}} \ \ (\text{exp bij.} \nearrow) \\
\Leftrightarrow\ & x \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e}}}_{\approx 0{,}61}
\end{aligned}
$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Sur $[1;e^2]$, $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de l'axe des abscisses.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{e^2} f(x)\,dx \\
&= \int_1^{e^2} \frac{2\ln(x)+1}{x}\,dx \\
&= 2\cdot\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx + \int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx \\
&= 2\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^{e^2} + [\ln(x)]_1^{e^2} \\
&= [\ln^2(x)]_1^{e^2} + [\ln(x)]_1^{e^2} \\
&= \ln^2(e^2) - \ln^2(1) + \ln(e^2) - \ln(1) \\
&= 4 - 0 + 2 - 0 \\
&= 6 \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

Question 3 **6+4=10P**

1) On cherche les réels a, b et c tels que :

$$\frac{a}{x^2}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)} \quad | \cdot \underbrace{x^2(x^2+1)}_{\neq 0}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a\cdot(x^2+1)+(bx+c)\cdot x^2 = x^3+x^2+2\\
&\Leftrightarrow \quad ax^2+a+bx^3+cx^2 = x^3+x^2+2\\
&\Leftrightarrow \quad bx^3+(a+c)x^2+a = x^3+x^2+2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=1\\ a+c=1\\ a=2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=1\\ c=-1\\ a=2\end{cases}
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}$

Les primitives de f sur $I \subset \mathbb{R}^*$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}dx\\
&= \int \left(\frac{2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx\\
&= 2\int x^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx\\
&= -\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2+1}_{>0}\right| - \operatorname{Arctan}(x)+k,\ \ (k\in\mathbb{R})\\
&= -\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x)+k,\ \ (k\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

2) $g(x)=\sin x\cdot(1+\sin x)$

Les primitives de g sont données par :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int g(x)dx\\
&= \int \sin x\cdot(1+\sin x)\,dx\\
&= \int (\sin(x)+\sin^2(x))\,dx\\
&= \int \sin(x)\ dx+\frac{1}{2}\int(1-\cos(2x))dx\\
&= -\cos(x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+k,\ \ (k\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

On cherche k tel que :

$$\begin{aligned}
&G(0)=1\\
\Leftrightarrow\ & -\cos(0)+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\sin(0)+k=1\\
\Leftrightarrow\ & -1+k=1\\
\Leftrightarrow\ & k=2
\end{aligned}$$

La primitive cherchée sur $[-\pi;\pi]$ est :

$$G(x)=-\cos(x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+2$$

Question 4

(4+2+3+4=13P)

$h(x) = x \cdot (1 - 2e^{x+1}) = x - 2xe^{x+1}$

dom $h = \mathbb{R}$

1) <u>Limites aux bornes du domaine de définition</u>

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{\left(1 - 2\underbrace{e^{\overbrace{x+1}^{\to-\infty}}}_{\to 0^+}\right)}_{\to 1}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\left(1 - 2\underbrace{e^{\overbrace{x+1}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\right)}_{\to-\infty}$$

$$= -\infty$$

<u>Asymptote oblique à gauche d'équation $y = x$:</u>

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}(x - 2xe^{x+1} - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-2x}_{\to+\infty} \underbrace{e^{x+1}}_{\to 0^+} \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{e^{-x-1}} \begin{matrix}\to+\infty\\ \to+\infty\end{matrix} \text{ f.i.}$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-e^{-x-1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x-1}} \to+\infty$$

$$= 0$$

$\text{AOG} \equiv y = x$

2) <u>Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à l'A.O. :</u>

$$\varphi(x) = h(x) - y_\Delta$$

$$= x - 2xe^{x+1} - x = -2x\underbrace{e^{x+1}}_{>0}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	−	
Pos.		$\frac{\mathcal{C}_h}{\Delta}$	$\cap$ $(0;0)$	$\frac{\Delta}{\mathcal{C}_h}$	

3) dom $h' = \mathbb{R}$

$$h'(x) = 1 - 2e^{x+1} - 2xe^{x+1}$$

$$h'(-1) = 1 - 2e^0 + 2e^0 = 1$$

$$h(-1) = -1 + 2e^0 = 1$$

<u>Équation de la tangente t au point d'abscisse -1 :</u>

$$y - 1 = 1 \cdot (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = x + 2$$

4) Sur $[-2; 0]$, $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de la droite Δ.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} (h(x) - x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -2xe^{x+1}\,dx$$

IPP: $u(x) = -2x \quad v'(x) = e^{x+1}$
$u'(x) = -2 \quad v(x) = e^{x+1}$

$$\mathcal{A} = [-2xe^{x+1}]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} 2e^{x+1}\,dx$$

$$= [-2xe^{x+1}]_{-2}^{0} + [2e^{x+1}]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - 4e^{-1} + 2e - 2e^{-1}$$

$$= 2e - \frac{6}{e} \text{ u.a} \approx 3{,}23 \text{ u.a.}$$

Question 5 **3+(2+4)=9P**

1) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \; (E)$$

Posons $y = e^x$

$$\begin{aligned}
(E) \Leftrightarrow \quad & y^2 - 4y + 3 = 0 \\
& [\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 4] \\
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{4-2}{2} \text{ ou } y = \frac{4+2}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & y = 1 \text{ ou } y = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = \ln 3
\end{aligned}$$

$S = \{0; \ln 3\}$

2) $f(x) = 4 - e^x$ et $g(x) = 3e^{-x}$

a) Coordonnées exactes des points d'intersection entre les courbes C_f et C_g :

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow \quad & 4 - e^x = 3e^{-x} \\
\Leftrightarrow \quad & -e^x + 4 - 3e^{-x} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x - 4 + 3e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x \\
\Leftrightarrow \quad & e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \\
\overset{1)}{\Leftrightarrow} \quad & x = 0 \text{ ou } x = \ln 3
\end{aligned}$$

$f(0) = 4 - e^0 = 3$ et $f(\ln 3) = 4 - e^{\ln 3} = 1$

Ainsi, les points d'intersection entre les courbes C_f et C_g sont $A(0; 3)$ et $B(\ln 3\,; 1)$.

b) Sur $[0\,; \ln 3]$, C_f se situe au-dessus de la courbe C_g.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \pi \cdot \int_0^{\ln 3} (f(x))^2 \, dx - \pi \cdot \int_0^{\ln 3} (g(x))^2 \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^{\ln 3} \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \\
&= \pi \cdot \int_0^{\ln 3} [(4 - e^x)^2 - (3e^{-x})^2] \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^{\ln 3} (16 - 8e^x + e^{2x} - 9e^{-2x}) \, dx \\
&= \pi \cdot \left[16x - 8e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{9}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 3} \\
&= \pi \cdot \left[\left(16 \ln 3 - 24 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{9}\right) - \left(0 - 8 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right)\right] \\
&= \pi \cdot (16 \ln 3 - 19 + 3) \\
&= \pi \cdot (16 \ln 3 - 16) \\
&= 16\pi \ln 3 - 16\pi \text{ u.v.} \approx 4{,}96 \text{ u.v.}
\end{aligned}$$