EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	**19.09.24**		*Horaire :*	**08:15 - 11:00**		*Durée :*	**165 minutes**
Discipline :	**MATHE - ANALY**	*Type :*	**écrit**	*Section(s) :*	**CC / CC-4LANG**		
					Numéro du candidat :		

Question 1 **5+4=9P**

1) Démontrer les propriétés suivantes :

   a) Si a est un réel strictement positif distinct de 1, alors pour tout réel x strictement positif et pour tout réel r,
$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

   b) Si a et b sont des réels strictement positifs distincts de 1, alors pour tout réel x strictement positif,
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :
$$\log(x-1) - \log_{0,1} 5 \leq \log_{100}(x^2)$$

Question 2 **(3+4+4+3)+5=19P**

1) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}$$

   a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et en déduire l'existence d'asymptotes éventuelles.

   b) Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par
$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^2}$$
   Dresser le tableau des variations de f et donner une valeur approchée à 10^{-2} près des extrema éventuels.

   c) Calculer la dérivée seconde de f, dresser le tableau de concavité et donner une valeur approchée à 10^{-2} près des coordonnées des points d'inflexion éventuels.

   d) Tracer la courbe de la fonction f ainsi que ses éventuelles asymptotes dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2) Étudier le signe de $f(x)$, puis calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.

Question 3

6+4=10P

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)}$$

Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

et en déduire les primitives de f sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^*$.

2) Sur $I = [-\pi\,;\pi]$, déterminer la primitive G de la fonction g définie par

$$g(x) = \sin x \cdot (1 + \sin x)$$

telle que $G(0) = 1$.

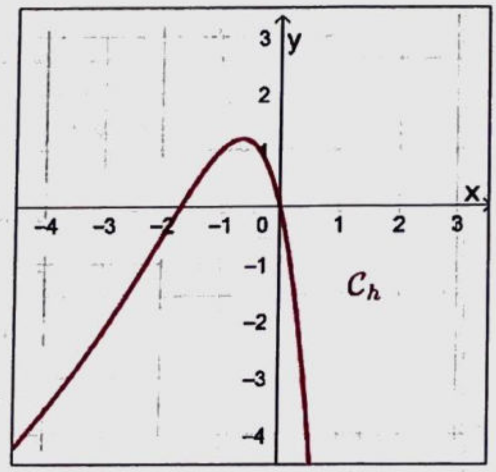
Question 4

4+2+3+4=13P

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x \cdot (1 - 2e^{x+1})$$

et soit C_h sa courbe représentative.



1) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition, puis démontrer que C_h admet la droite $\Delta \equiv y = x$ comme asymptote oblique à gauche.
2) Étudier la position relative de la courbe C_h par rapport à l'asymptote oblique Δ.
3) Établir l'équation de la tangente t à la courbe C_h au point d'abscisse -1.
4) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_h, la droite Δ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$. Pour le calcul d'aire, on pourra utiliser les informations de la figure.

Question 5

3+(2+4)=9P

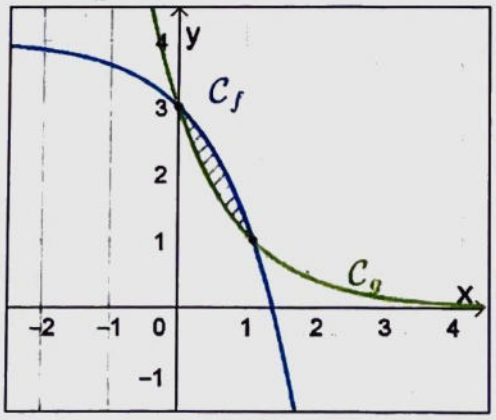
1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

2) On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - e^x \text{ et } g(x) = 3e^{-x}$$

et on considère leurs courbes représentatives C_f et C_g.



a) Déterminer par le calcul les coordonnées exactes des points d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface fermée délimitée par les courbes C_f et C_g. Pour le calcul de volume, on pourra utiliser les informations de la figure.