**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024**

**CORRIGÉ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Date :* | 03.06.24 | | *Horaire :* | 08:15 - 11:00 | | *Durée :* | 165 minutes |
| *Discipline :* | MATHE - ANALY | *Type :* | écrit | *Section(s) :* | CC / CC-4LANG | | |
| | | | | | *Numéro du candidat :* | | |

**Question théorique** **4 points**

Voir EM page 55.

**Question 1** **(4 + 4 + 4 + 4 + 3) + 5 = 20 points**

1) $f(x) = -(x+3)^2 e^{-3-x} = (-x^2 - 6x - 9)e^{-3-x}$

a) C.E. : / $\quad$ $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(-x^2-6x-9)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to-\infty}}}_{\to 0} \qquad f.i. \text{"}\infty \cdot 0\text{"}$$

$$\left[\text{Calcul à part : } \lim_{x\to\pm\infty}(-x^2-6x-9) = \lim_{x\to\pm\infty} -x^2 = -\infty\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-x^2-6x-9}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{\overbrace{3+x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}} \qquad f.i. \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-2x-6}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{3+x}}_{\to+\infty}} \qquad f.i. \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\underbrace{e^{3+x}}_{\to+\infty}}$$

$$= 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(-x^2-6x-9)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = -\infty$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale à gauche.

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique à gauche par les formules de Cauchy :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\underbrace{-x-6}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{9}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to+\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-3-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique à gauche.

b) $\mathrm{Dom} f' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x-6)e^{-3-x} + (-x^2-6x-9)\cdot(-1)\cdot e^{-3-x} = (-2x-6+x^2+6x+9)e^{-3-x} \\ &= (x^2+4x+3)e^{-3-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-3-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2+4x+3$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+3 = 0 \qquad\qquad [\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 = 2^2 > 0] \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4-2}{2\cdot 1} \quad \vee \quad x = \frac{-4+2}{2\cdot 1} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -3 \quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ Max | $\searrow$ | $-\frac{4}{e^2}$ min | $\nearrow$ | $0$ |

$f(-3) = -(-3+3)^2 e^{-3-(-3)} = 0 \qquad f(-1) = -(-1+3)^2 e^{-3-(-1)} = -4e^{-2} = -\frac{4}{e^2} \simeq -0{,}54$

$f$ admet un minimum en $-1$ qui vaut $-\frac{4}{e^2}$ et un maximum en $-3$ qui vaut $0$.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse $-3$ et $-1$.

c) $\mathrm{Dom} f'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+4)e^{-3-x} + (x^2+4x+3)\cdot(-1)\cdot e^{-3-x} = (2x+4-x^2-4x-3)e^{-3-x} \\ &= (-x^2-2x+1)e^{-3-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-3-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-x^2-2x+1$.

$$\left[\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1 \\ &= 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0 \end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2-2\sqrt{2}}{2\cdot(-1)} \quad \vee \quad x = \frac{2+2\sqrt{2}}{2\cdot(-1)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1+\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -1-\sqrt{2} \\ &\qquad\quad \simeq 0{,}41 \qquad\qquad\quad \simeq -2{,}41 \end{aligned}$$

Tableau de concavité de $f$ :

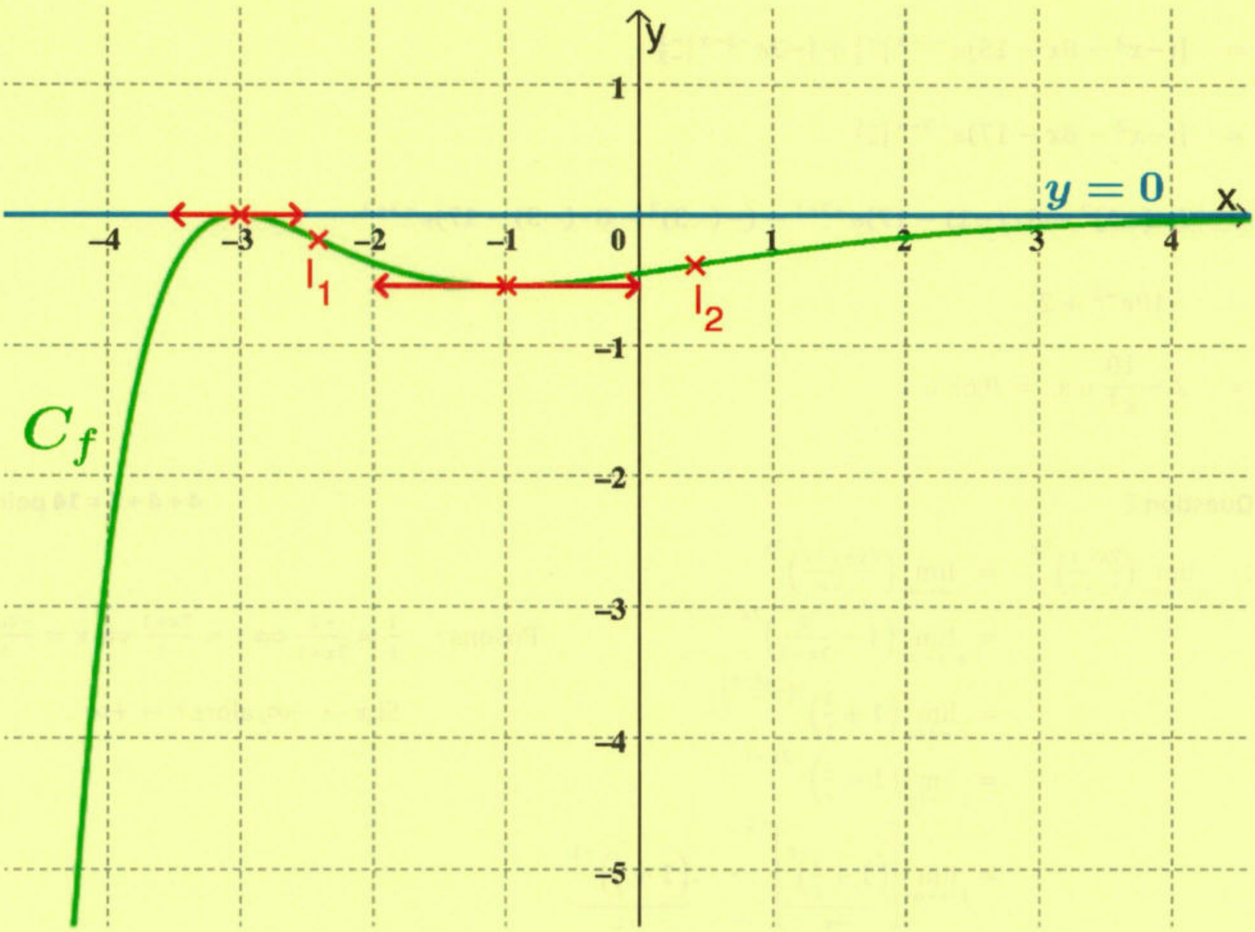
| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\mathcal{C}_f$ | | $\cap$ | PI | $\cup$ | PI | $\cap$ | |

$$f(-1-\sqrt{2}) = -(-1-\sqrt{2}+3)^2 e^{-3-(-1-\sqrt{2})} = -(2-\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} = -(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \simeq -0{,}19$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = -(-1+\sqrt{2}+3)^2 e^{-3-(-1+\sqrt{2})} = -(2+\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} = -(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \simeq -0{,}38$$

$\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion : $I_1\left(-1-\sqrt{2}; -(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ et $I_2\left(-1+\sqrt{2}; -(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}\right)$

d)



2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0$ (d'après le tableau de variation ou la représentation graphique de $f$)

L'aire de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-3$ et $x=-1$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{-3}^{-1} f(x)dx = -\int_{-3}^{-1}(-x^2-6x-9)e^{-3-x}dx \\
&= \int_{-3}^{-1}(x^2+6x+9)e^{-3-x}dx \\
&\begin{bmatrix} u(x)=x^2+6x+9 & v'(x)=e^{-3-x} \\ u'(x)=2x+6 & v(x)=-e^{-3-x} \end{bmatrix} \\
&\overset{IPP}{=} \left[-(x^2+6x+9)e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} + \int_{-3}^{-1}(2x+6)e^{-3-x}dx \\
&\begin{bmatrix} u(x)=2x+6 & v'(x)=e^{-3-x} \\ u'(x)=2 & v(x)=-e^{-3-x} \end{bmatrix} \\
&\overset{IPP}{=} \left[(-x^2-6x-9)e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} + \left[-(2x+6)e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} + \int_{-3}^{-1}2e^{-3-x}dx \\
&= \left[(-x^2-8x-15)e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} + \left[-2e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} \\
&= \left[(-x^2-8x-17)e^{-3-x}\right]_{-3}^{-1} \\
&= (-(-1)^2-8\cdot(-1)-17)e^{-3+1} - (-(-3)^2-8\cdot(-3)-17)e^{-3+3} \\
&= -10e^{-2}+2 \\
&= 2-\frac{10}{e^2}\text{ u.a.} \simeq 0{,}65\text{ u.a.}
\end{aligned}$$

**Question 2** **4 + 4 + 6 = 14 points**

1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+1}\right)^{7x} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x+1-2}{7x+1}\right)^{7x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{7x+1}\right)^{7x} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{7\left(\frac{-2t-1}{7}\right)} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}_{\to e}\Bigg]^{-2}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}}_{\to 1} \\
&= e^{-2} = \frac{1}{e^2}
\end{aligned}$$

Posons : $\frac{1}{t}=\frac{-2}{7x+1} \Leftrightarrow t=\frac{7x+1}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-2t-1}{7}$

Si $x\to-\infty$, alors $t\to+\infty$

2) $(E) \quad 7^x - 7^{-x} = 7(1 + 7^{-x})$ C.E. : / $\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (E) \iff 7^x - 7^{-x} = 7 + 7 \cdot 7^{-x}$

$\iff 7^x - 7 - 8 \cdot 7^{-x} = 0 \qquad |\cdot 7^x > 0$

$\iff 7^{2x} - 7 \cdot 7^x - 8 = 0$ Posons $y = 7^x$ avec $y > 0$

$\iff y^2 - 7y - 8 = 0$ $[\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 81 = 9^2 > 0]$

$\iff y = \dfrac{7-9}{2} \quad \vee \quad y = \dfrac{7+9}{2}$

$\iff \underbrace{y = -1}_{\text{à écarter car } y>0} \quad \vee \quad y = 8$

$\iff 7^x = 8 \qquad |\log_7 \text{ bij.}$

$\iff x = \log_7 8$

$\iff x = 3\log_7 2$

$S = \{3\log_7 2\}$

3) $(I) \quad 1 + \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leq \log_7(2x-1) - \log_{\sqrt{7}}(2-x)$

C.E. : (1) $x + 2 > 0 \iff x > -2$ (2) $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$ (3) $2 - x > 0 \iff x < 2$

donc $\mathrm{Dom}(I) = \left]\frac{1}{2}; 2\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}; 2\right[ \quad (I) \iff \log_7 7^1 + \dfrac{\log_7(x+2)}{\log_7 \frac{1}{7}} \leq \log_7(2x-1) - \dfrac{\log_7(2-x)}{\log_7\sqrt{7}}$

$\iff \log_7 7 + \dfrac{\log_7(x+2)}{-\log_7 7} \leq \log_7(2x-1) - \dfrac{\log_7(2-x)}{\frac{1}{2}\log_7 7}$

$\iff \log_7 7 - \log_7(x+2) \leq \log_7(2x-1) - 2\log_7(2-x)$

$\iff \log_7 7 + 2\log_7(2-x) \leq \log_7(2x-1) + \log_7(x+2)$

$\iff \log_7[7(2-x)^2] \leq \log_7[(2x-1)(x+2)] \qquad |\log_7 \text{ bij.} \nearrow$

$\iff 7(2-x)^2 \leq (2x-1)(x+2)$

$\iff 28 - 28x + 7x^2 - (2x^2 + 3x - 2) \leq 0$

$\iff 5x^2 - 31x + 30 \leq 0$

T.D.S. de $5x^2 - 31x + 30$ : $\Delta = (-31)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 30 = 361 = 19^2 > 0$

$x_1 = \frac{31-19}{10} = \frac{6}{5} \qquad x_2 = \frac{31+19}{10} = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{6}{5}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x^2-31x+30$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$S=\left[\frac{6}{5};5\right]\cap\left]\frac{1}{2};2\right[=\left[\frac{6}{5};2\right[$$

**Question 3** **5 + 3 = 8 points**

1) $f(x)=3-x-\ln\frac{x-3}{x+3}$

C.E. : (1) $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$

(2) $\frac{x-3}{x+3}>0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x-3}{x+3}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

donc $\mathrm{Dom}f=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3-x-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=-\infty$$

[Calcul à part : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1=1$]

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3-x-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=+\infty$$

Il n'y a donc pas d'A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Déterminons si $\mathcal{C}_f$ admet une A.O. au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

<table>
<tr>
<td>
Alternative 1 :<br>
$f(x)=-x+3+\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)=-\ln\frac{x-3}{x+3}$<br>
Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\ln\frac{x-3}{x+3}=0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta\equiv y=-x+3$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
</td>
<td>
Alternative 2 : Par les formules de Cauchy<br>
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x-\ln\frac{x-3}{x+3}}{x}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}-1-\underbrace{\frac{\ln\frac{x-3}{x+3}\ \to 0}{x\ \to\pm\infty}}_{\to 0}\right)\\&=-1\end{aligned}$$
$$\lim_{\pm\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{\pm\infty}\left(3-\underbrace{\ln\frac{x-3}{x+3}}_{\to 0}\right)=3$$
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta\equiv y=-x+3$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
</td>
</tr>
</table>

2) Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son A.O. $\Delta \equiv y = -x + 3$ :

Soit $M\big(x; f(x)\big) \in \mathcal{C}_f$ et $N(x; -x+3) \in \Delta$.

On a : $y_M - y_N = f(x) - (-x+3) = -\ln\frac{x-3}{x+3}$

$$
\begin{aligned}
y_M - y_N > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad -\ln\frac{x-3}{x+3} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\frac{x-3}{x+3} < 0 \\
& \overset{\text{ln bij.} \nearrow}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x-3}{x+3} < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{-6}{x+3} < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x+3 > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x > -3
\end{aligned}
$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_M - y_N$ | $-$ | | | $+$ |
| Position relative | $\frac{\Delta}{\mathcal{C}_f}$ | | | $\frac{\mathcal{C}_f}{\Delta}$ |

La courbe $\mathcal{C}_f$ se situe en-dessous de $\Delta$ sur $]-\infty; -3[$ et au-dessus de $\Delta$ sur $]3; +\infty[$.

**Question 4** **4 points**

Par lecture graphique, les abscisses des points d'intersection $A$ et $B$ des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont $-2$ et $1$ et $\forall x \in [-2; 1], \quad g(x) > f(x) > 0.$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
V \quad & = \pi \int_{-2}^{1} \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2\right) dx \\
& = \pi \int_{-2}^{1} [(3-x)^2 - (x^2+1)^2] dx \\
& = \pi \int_{-2}^{1} [x^2 - 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1)] dx \\
& = \pi \int_{-2}^{1} (-x^4 - x^2 - 6x + 8) dx \\
& = \pi \left[ -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_{-2}^{1} \\
& = \pi \left[ -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 3 + 8 - \left( \frac{32}{5} + \frac{8}{3} - 12 - 16 \right) \right] = \pi \left[ \frac{67}{15} - \left( -\frac{284}{15} \right) \right] \\
& = \frac{117}{5} \pi \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

**Question 5** **(3 + 4) + 3 = 10 points**

1) a) Factorisons le dénominateur de $f(x)$ :

$$27x^3 + 9x^2 + 3x + 1 = 9x^2(3x+1) + 1 \cdot (3x+1) = (3x+1)(9x^2+1)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{9x^2+1} + \frac{c}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{36x^2 - 3x - 1}{(3x+1)(9x^2+1)} = \frac{(ax+b)(3x+1) + c(9x^2+1)}{(3x+1)(9x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 36x^2 - 3x - 1 = 3ax^2 + ax + 3bx + b + 9cx^2 + c$$

$$\Leftrightarrow \quad 36x^2 - 3x - 1 = (3a+9c)x^2 + (a+3b)x + (b+c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9c = 36 & |:3 \\ a + 3b = -3 \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3c = 12 \\ a + 3b = -3 \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - 3c \\ (12 - 3c) + 3(-1-c) = -3 \\ b = -1 - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - 3c \\ -6c + 9 = -3 \\ b = -1 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - 3c \\ -6c = -12 \\ b = -1 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - 3 \cdot 2 \\ c = 2 \\ b = -1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 6 \\ c = 2 \\ b = -3 \end{cases}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $\quad f(x) = \dfrac{6x-3}{9x^2+1} + \dfrac{2}{3x+1}$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{36x^2 - 3x - 1}{27x^3 + 9x^2 + 3x + 1}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{6x-3}{9x^2+1} + \frac{2}{3x+1}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{6x}{9x^2+1} - \frac{3}{9x^2+1} + \frac{2}{3x+1}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{18x}{9x^2+1} - \frac{3}{(3x)^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3x+1}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\ln|9x^2+1| - \text{Arctan}(3x) + \frac{2}{3}\ln|3x+1|\right]_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 - \text{Arctan}(1) + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1 + \text{Arctan}(0) - \frac{2}{3}\ln 1 \\
&= \ln 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2)

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(1 - \sin 2x)^3 dx = \int \cos 2x \cdot (1 - \sin 2x)^3 dx$$

Posons $u(x) = 1 - \sin 2x$ $\qquad$ $u'(x) = -2\cos 2x$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int (-2\cos 2x)(1 - \sin 2x)^3 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \sin 2x)^4}{4} + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$= -\frac{(1 - \sin 2x)^4}{8} + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$