EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

QUESTIONNAIRE

Date :	03.06.24		Horaire :	08:15 - 11:00	Durée :	165 minutes
Discipline :	MATHE - ANALY	Type :	écrit	Section(s) :	CC / CC-4LANG	
					Numéro du candidat :	

Question théorique **2 + 2 = 4 points**

Démontrer les propriétés suivantes :

Si a est un réel strictement positif distinct de 1, alors,

1) *pour tous réels x et y strictement positifs,*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

2) *pour tout réel x strictement positif et pour tout réel r,*

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Question 1 **(4 + 4 + 4 + 3) + 5 = 20 points**

1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -(x+3)^2 e^{-3-x}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.

b) Montrer que la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-3-x}$$

Établir le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels.

c) Calculer la dérivée seconde de f, étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

d) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé du plan d'unité 2 cm en indiquant tous les éléments importants (asymptotes, extrema et points d'inflexion éventuels).

2) Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au centième près de l'aire A de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$.

Question 2 **4 + 4 + 6 = 14 points**

1) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+1}\right)^{7x}$$

2) Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$7^x-7^{-x}=7(1+7^{-x})$$

3) Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$1+\log_{\frac{1}{7}}(x+2)\leq\log_7(2x-1)-\log_{\sqrt{7}}(2-x)$$

Question 3 **5 + 3 = 8 points**

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=3-x-\ln\frac{x-3}{x+3}$$

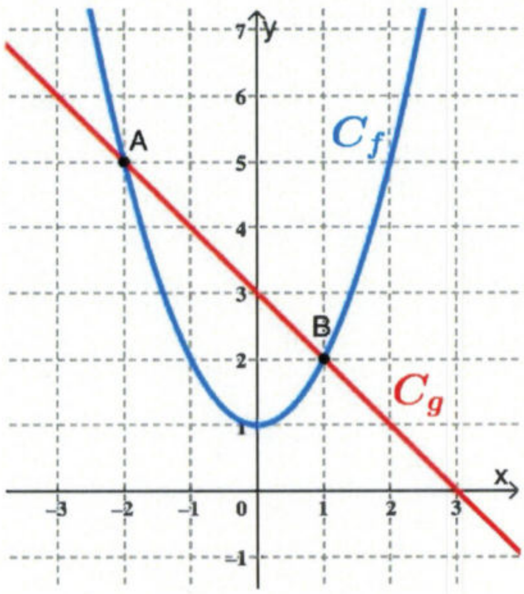
et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition de f puis étudier le comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes horizontales ou obliques éventuelles.

Question 4 **4 points**

En utilisant les informations de la figure, calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}$ du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface fermée délimitée par les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=x^2+1 \qquad \text{et} \qquad g(x)=3-x$$



Question 5 **(3 + 4) + 3 = 10 points**

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par :

$$f(x)=\frac{36x^2-3x-1}{27x^3+9x^2+3x+1}$$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$:

$$f(x)=\frac{ax+b}{9x^2+1}+\frac{c}{3x+1}$$

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{36x^2-3x-1}{27x^3+9x^2+3x+1}dx$$

2) Déterminer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)(1-\sin 2x)^3dx$$

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\quad$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\quad$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$