

**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES**  
**Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**

Date :	08.06.23	Durée :	08:15 - 11:00
Discipline :	<b>Mathématiques - Mathématiques-Analyse</b>	Section(s) :	<b>CC / CC-4LANG</b>

**Question de théorie**

(4+2 = 6 pts.)

- Voir EM66 page 56/57
- Voir EM66 page 67

**Question 1**

(4+2+6+3+4 = 19 pts.)

- CE :  $x \neq 0$  et  $x > 0$       $D_f = ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{2} + \frac{3 \ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \text{A.V.: } x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2} + \frac{3 \ln x}{x} \xrightarrow{+\infty} -\frac{3}{2} \quad \text{A.H.: } y = -\frac{3}{2}$$

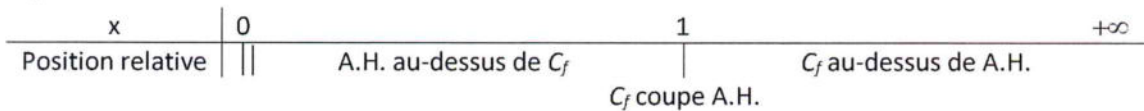
(\*) calcul à part :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$2. \quad y_{C_f} - y_{A_H} = f(x) - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3 \ln x}{x} > 0$$

$f(x)$  prend le signe de  $\ln x$

$$y_{C_f} - y_{A_H} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$



- $D_{f'} = ]0; +\infty[$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = 3 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{3 \cdot (1 - \ln x)}{x^2}$$

$f'(x)$  prend le signe de  $1 - \ln x$

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < e$$

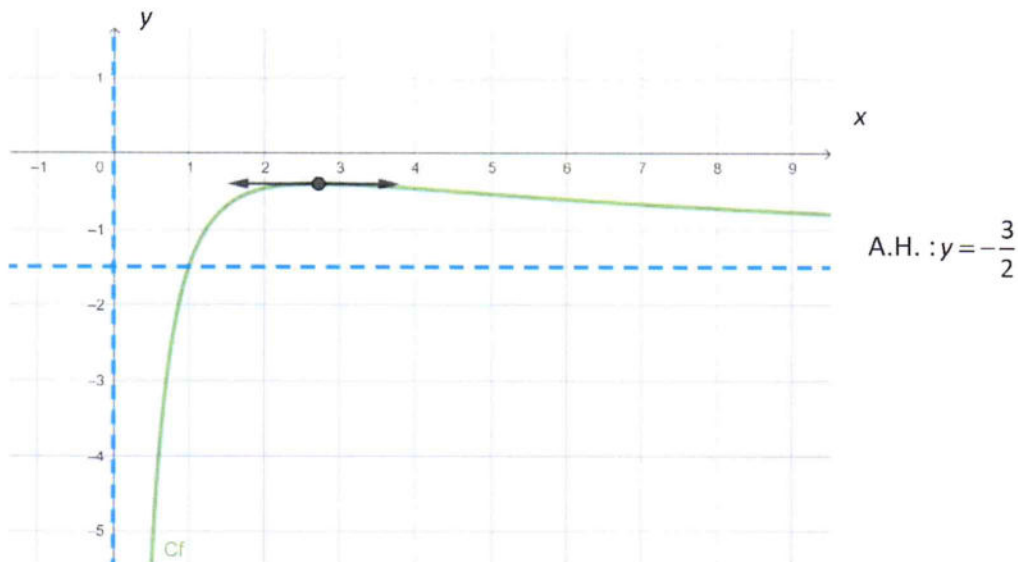
Tdv :

x	0	e	+∞
f'(x)		+	-
f(x)		-0,4	-3/2
	-∞		

$f$  admet un maximum (absolu) en  $x=e$  avec  $f(e) = -0,4$  donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ : f(x) < 0$ .

4. Tableau de valeurs :

x	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-5.66	-1.50	-0.46	-0.40	-0.46	-0.53	-0.60	-0.67	-0.72



A.V. :  $x=0$

5.  $f$  est négative sur  $[1; e^2]$ , donc :

$$\begin{aligned}
 A &= -\int_1^{e^2} f(x) dx \\
 &= -\int_1^{e^2} \left( -\frac{3}{2} + 3 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= -\left[ -\frac{3}{2}x + 3 \cdot \frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^{e^2} \\
 &= -\left( -\frac{3e^2}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) + \left( -\frac{3}{2} + 0 \right) \\
 &= \frac{3e^2}{2} - \frac{15}{2} \text{ u.a.} \quad (\approx 3,58 \text{ u.a.})
 \end{aligned}$$

Question 2

(4,5+4,5 = 9 pts.)

1.  $(3^{x+1} - 4) \cdot 3^x \leq -1$  (\*)

$D_E = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0$

posons  $y = 3^x, y > 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 \leq 0$

$\Delta = 4 \quad y_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{6} = \frac{1}{3} ; y_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{6} = 1$

y	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$		
$3y^2 - 4y + 1$		+	0	-	0	+

$3y^2 - 4y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \stackrel{(1)}{\leq} y \stackrel{(2)}{\leq} 1$

Revenons à  $x$  :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \Leftrightarrow 3^{-1} \leq 3^x \Leftrightarrow -1 \leq x$$

$$(2) \Leftrightarrow 3^x \leq 1 \Leftrightarrow 3^x \leq 3^0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{Donc } (*) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \quad S = [-1; 0]$$

2.  $\log_{\sqrt{3}}(3-x) - \log_3(x+1) - \log_9 25 = 0 \quad (*)$

$$\begin{array}{lll} \text{C.E.:} & 3-x > 0 & x+1 > 0 & D_E = ]-1; 3[ \\ & \Leftrightarrow x < 3 & \Leftrightarrow x > -1 & \end{array}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\ln(3-x)}{\ln\sqrt{3}} - \frac{\ln(x+1)}{\ln 3} - \frac{\ln 25}{\ln 9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{\ln(3-x)}{\ln 3} - \frac{\ln(x+1)}{\ln 3} - \frac{2\ln 5}{2\ln 3} = 0 \quad | \cdot \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(3-x)^2 = \ln(x+1) + \ln 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(9-6x+x^2) = \ln(5x+5) \quad | \text{bij}$$

$$\Leftrightarrow 9-6x+x^2 = 5x+5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$\Delta = 105 \quad x_1 = \frac{11 - \sqrt{105}}{2} \approx 0,38 \quad x_2 = \frac{11 + \sqrt{105}}{2} \approx 10,62 \notin D_E$$

$$S = \left\{ \frac{11 - \sqrt{105}}{2} \right\}$$

**Question 3**

**(3+3 = 6 pts.)**

1.  $\lim_{n \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2n}{5} \right)^{\frac{2}{n} + 4} \quad (*) \quad 1^\infty \text{ f.i.}$

posons :  $x = \frac{2n}{5} \Leftrightarrow n = \frac{5x}{2}$  si  $n \rightarrow 0$ , alors  $x \rightarrow 0$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2 \cdot 2}{5x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x} + 4} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_e \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^4}_1 = e^{\frac{4}{5}} \cdot 1 = e^{\frac{4}{5}}$$

2. Soit  $f(x) = e^{\tan^2 x}$ .

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e$$

$$f'(x) = e^{\tan^2 x} \cdot 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4e$$

$$t \equiv y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = 4ex - \pi e + e$$

Question 4

(3+5+6 = 14 pts.)

$$1. f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \underbrace{\left(2x + \frac{1}{3}\right)}_u \underbrace{(3x^2 + x - 5)}_v$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + x - 5)^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} (12 - 2 - 5)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{25}{6}$$

Donc la primitive vérifiant les conditions est  $F(x) = \frac{(3x^2 + x - 5)^2 - 25}{6}$ .

$$2. \int_1^0 \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_1^0 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_1^0 \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_1^0 -(-2x) \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_1^0 \frac{-3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{\frac{1}{2}} (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_1^0 + \left[ -3 \operatorname{Arcsin} \left( \frac{x}{2} \right) \right]_1^0$$

$$= -2 \left( 4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \right) - 3 \left( 0 - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= -2(2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}$$

$$\approx 1,03$$

$$3. A(x) = \int -e^{3x} \cos(-2x) dx$$

$$= -\int e^{3x} \cos(-2x) dx$$

IPP  $u(x) = \cos(-2x) \quad v'(x) = e^{3x}$

$u'(x) = 2\sin(-2x) \quad v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$= -\left[ \frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) \right] + \frac{2}{3} \int e^{3x} \sin(-2x) dx$$

IPP  $u(x) = \sin(-2x) \quad v'(x) = e^{3x}$

$u'(x) = -2\cos(-2x) \quad v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$= -\left[ \frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) \right] + \frac{2}{3} \left\{ \left[ \frac{1}{3}e^{3x} \sin(-2x) \right] + \frac{2}{3} \int e^{3x} \cos(-2x) dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) + \frac{2}{9}e^{3x} \sin(-2x) + \frac{4}{9} \underbrace{\int e^{3x} \cos(-2x) dx}_{=-A(x)}$$

Donc :

$$A(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) + \frac{2}{9}e^{3x} \sin(-2x) + \frac{4}{9}(-A(x)) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{9}A(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) + \frac{2}{9}e^{3x} \sin(-2x) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{9}{13} \left( -\frac{1}{3}e^{3x} \cos(-2x) + \frac{2}{9}e^{3x} \sin(-2x) \right) + k \quad , k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = -\frac{3}{13}e^{3x} \cos(-2x) + \frac{2}{13}e^{3x} \sin(-2x) + k \quad , k \in \mathbb{R}$$

**Question 5**

(6 pts.)

Position de  $C_f$  par rapport à  $C_g$  :

$$f(x) > g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > \frac{1}{2}x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 > 0$$

$$\Delta = \frac{25}{4} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Position :

X	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Position relative	$C_f / C_g$		$C_g / C_f$	$C_f / C_g$
	$C_f$ coupe $C_g$		$C_f$ coupe $C_g$	

De plus  $f(x) = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$V = \pi \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (g^2(x) - f^2(x)) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^2 - (x^2 + 2x + 2)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 - x^4 - 4x^2 - 4 - 4x^3 - 4x^2 - 8x \right) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left( -x^4 - 4x^3 - \frac{31}{4}x^2 - 5x + 5 \right) dx$$

$$= \pi \left[ -\frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{31}{12}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x \right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pi \left( \frac{89}{60} + \frac{134}{15} \right)$$

$$= \frac{125}{12} \pi \text{ u.v.}$$

$$\approx 32,72 \text{ u.v.}$$