

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	19.05.23	Durée :	08:15 - 11:00	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse		Section(s) :	CC / CC-4LANG	

Question 1

4 + (2 + 4) + 5 = 15 points

1) Démontrer le théorème suivant :

Si f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors, pour tout x de $[a; b]$,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, noté $[F(t)]_a^b$.

2) a) Calculer l'intégrale suivante :

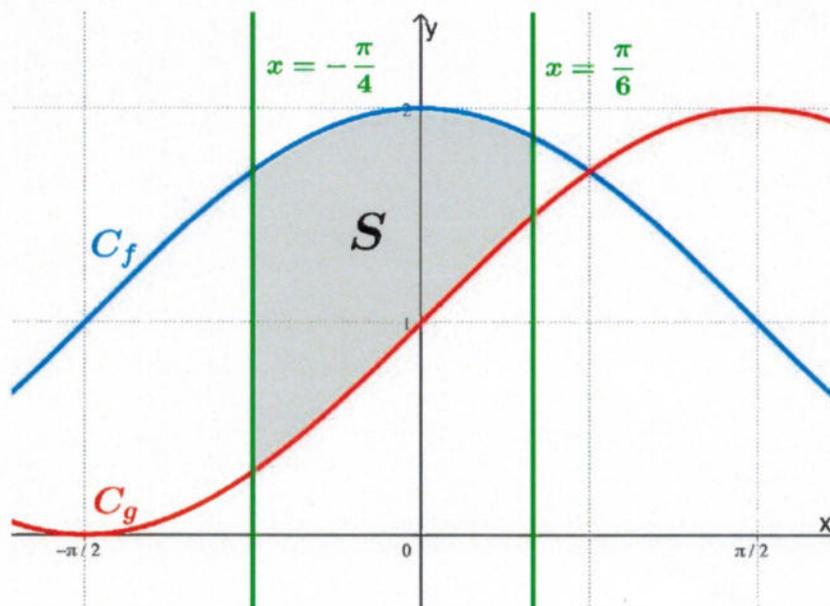
$$\int \frac{4}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \tan x)^2 dx$$

3) Calculer la valeur exacte du volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface S délimitée par les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ et par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \cos x + 1$ et $g(x) = \sin x + 1$.

N.B. : On pourra utiliser les informations de la figure ci-dessous.



Question 2**4 + 6 = 10 points**1) Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$(E) \quad e^{2x} = 6e^{-2x} + 1$$

2) Résoudre l'inéquation suivante dans \mathbb{R} :

$$(I) \quad \log_2(x - 2) - \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) \geq 4\log_4(2x - 4)$$

Question 3**(4 + 4 + 4 + 2 + 3) + 5 + 5 = 27 points**1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 4(x^2 - 3x + 1)e^{1-x}$$

et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.a) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f .b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis montrer que

$$f'(x) = 4e^{1-x}(-x^2 + 5x - 4).$$

Établir le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels.c) Calculer la dérivée seconde de f après avoir précisé son domaine, étudier la concavité de \mathcal{C}_f et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.d) Déterminer une équation de la tangente t_2 à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.e) Représenter graphiquement \mathcal{C}_f et t_2 dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 cm, en indiquant tous les éléments importants.2) Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au centième près de l'aire de la partie du plan délimitée par \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.3) Déterminer l'(les) abscisse(s) du(des) point(s) de la courbe \mathcal{C}_f admettant une tangente passant par le point $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.**Question 4****4 + 4 = 8 points**Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2-x}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.2) Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction f .

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$		$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		