LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**C, D**	*Durée de l'épreuve :* 2h 45min *Date de l'épreuve :* 21/05/2021

Question 1 [4+6=10 points]

1) Démontrez la propriété suivante :
Si a et b sont des réels strictement positifs distincts de 1, alors, pour tout réel x strictement positif,
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,.$$
Déduisez-en trois cas particuliers importants.

2) Résolvez, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :
$$\log_6(x+2) - \log_{\sqrt{6}}(3-2x) \geq \log_{\frac{1}{6}} 7\,.$$

Question 2 [(4+2+3,5+3,5+2+3)+5=23 points]

1) Soit f la fonction définie par
$$f(x) = e^{-x}(4x^2 - 1)$$
et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
   a) Déterminez le domaine de définition et étudiez le comportement asymptotique de f.
   b) Étudiez la position de C_f par rapport à ses asymptotes horizontales ou obliques éventuelles.
   c) Montrez que
   $$f'(x) = e^{-x}\,(1 + 8x - 4x^2) \qquad (\forall\, x \in \operatorname{dom} f')\,.$$
   Déduisez-en le tableau des variations et précisez les extrema éventuels.
   d) Calculez la dérivée seconde de f, étudiez la concavité de C_f et précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
   e) Déterminez une équation de la tangente t à C_f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
   f) Représentez graphiquement la fonction f et la tangente t dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 cm.

2) Calculez la valeur exacte de l'aire de la partie du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 10$ respectivement.

Question 3 [4+2=6 points]

Calculez les limites suivantes.

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x-4}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_4\left(\frac{5}{6-x}\right)}$

Question 4 [2+4=6 points]

Calculez les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{\sin(4x)}{\cos^3(2x)}\,dx \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Question 5 [3+4=7 points]

On considère la fonction f définie sur $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 13}{(x^2+4)(2x-1)}.$$

1) Déterminez les réels a et b tels que
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{2x-1} \qquad (\forall\, x \in \operatorname{dom} f).$$

2) Déduisez-en, sur un intervalle I à préciser, la primitive de f qui prend la valeur $\ln 2$ pour $x = 0$.

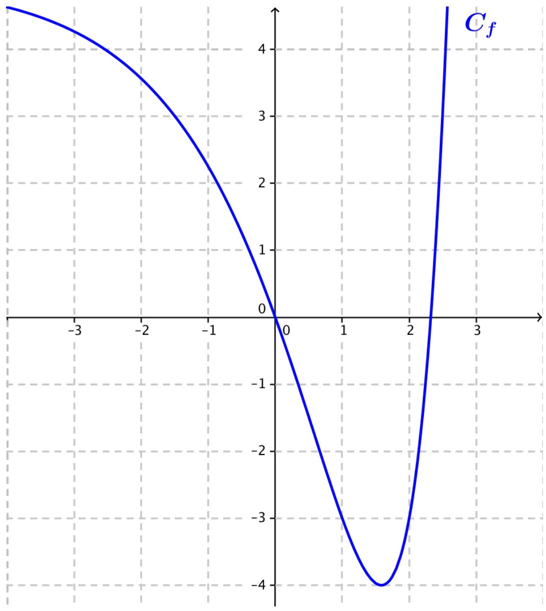
Question 6 [3+1+4=8 points]

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5$$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Résolvez, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation
$$f(x) \leq 0.$$
2) Étudiez le signe de la fonction f en utilisant les résultats du point 1).
3) Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ respectivement.



N.B. : Vous pouvez, si nécessaire, utiliser les informations de la figure pour le calcul d'aire.

Formulules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$	
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$	$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$	
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$	
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$	
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		