EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024
QUESTIONNAIRE

Date :	22.05.24		Horaire :	08:15 - 12:15	Durée :	240 minutes
Discipline :	MATIN - MATH2	Type :	écrit	Section(s) :	CB / CB-4LANG	
					Numéro du candidat :	

Question 1

(2+2+4+3+2=13 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2}{1-x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) & \text{si } x \leqslant 0 \\[2ex] \dfrac{-x^2-2x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f en 0. En déduire le domaine de continuité de f.

b) Calculer les limites aux bornes du domaine et étudier le comportement asymptotique de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

c) Étudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation géométrique. En déduire le domaine de dérivabilité de f. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

d) Vérifier s'il existe des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse strictement positive qui passent par le point $A(-2;0)$. Le cas échéant, donner l'équation réduite de chacune de ces tangentes.

e) Représenter la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

Question 2

(5+4=9 points)

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) + \log_5\left|2x - x^2\right| = \log_{\sqrt{5}}\sqrt{5-x}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $13 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 9^{\frac{3-3x}{6}} - 1 \leqslant 6 \cdot 27^{\frac{2x-2}{3}}$

Question 3

((1+1+1)+(2+2+3)=10 points)

A) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln(x)$

  a) Déterminer le domaine de définition de g, calculer les limites aux bornes du domaine.

  b) Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g.

  c) Calculer l'image de 1 par la fonction g et en déduire le signe de g sur son domaine.

B) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} - (x-1)$

  a) Déterminer le domaine de définition de f, calculer les limites aux bornes du domaine de f et étudier le comportement asymptotique de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

  b) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.
  (Indication : utiliser les résultats de A)).

  c) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ respectivement.

Question 4

(2,5+2,5=5 points)

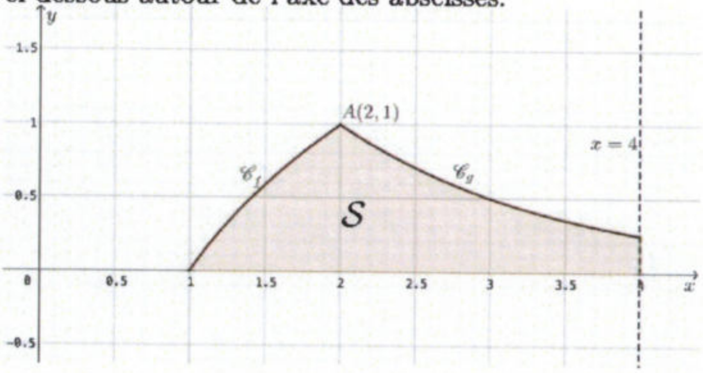
Calculer les intégrales suivantes :

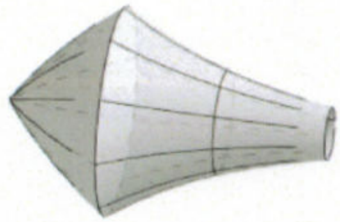
a) $\displaystyle\int \cos(2x)\cdot\ln(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \left(\sin(2x)-\frac{1}{\cos(2x)}\right)^2 \mathrm{d}x$

Question 5

(4 points)

On donne les fonctions f définie sur $[1;2[$ par $f(x)=\log_2(x)$ et g définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x)=2^{-x+2}$ et leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé.
Calculer le volume exact du solide de révolution engendré par la rotation de la surface $\mathcal{S}$ représentée ci-dessous autour de l'axe des abscisses.

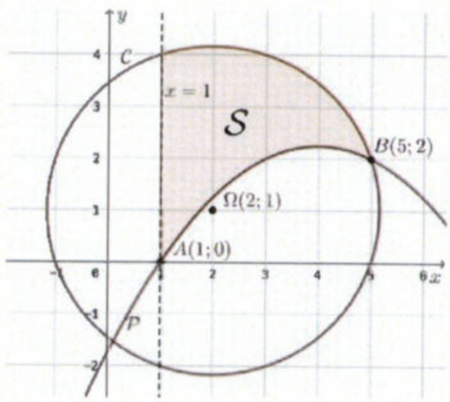




Question 6

(8 points)

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon $r=\sqrt{10}$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=-\dfrac{1}{4}x^2+2x-\dfrac{7}{4}$.
Soit $\mathcal{S}$ la surface du plan délimitée par le cercle $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et la droite d'équation $x=1$ représentée ci-contre.
Déterminer l'aire exacte de la surface $\mathcal{S}$.
(La surface et les coordonnées des points d'intersection peuvent être lues sur le graphique.)



Question 7

(5+5+1=11 points)

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=m(x+1)-\ln|x-m|$ où m est un paramètre réel.
En discutant suivant les valeurs du paramètre réel m :

a) Indiquer le domaine de définition de f_m et étudier le comportement asymptotique de la courbe représentative $\mathscr{C}_{f_m}$.

b) Étudier les variations de f_m et dresser un tableau de variation pour chaque cas de figure.

c) Étudier la concavité de $\mathscr{C}_{f_m}$ et dresser un tableau de concavité pour chaque cas de figure.

Examen de fin d'études secondaires — Sections B, C, D, E, F

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad \cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad \tan(\pi + x) = \tan x$ $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$