EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024					
CORRIGÉ					
Date :	22.05.24	*Horaire :*	08:15 - 12:15	*Durée :*	240 minutes
Discipline :	MATIN - MATH2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG
				Numéro du candidat :	

Question 1

(2+2+4+3+2=13 points)

a) $\forall x \leqslant 0, f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{1-x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

C.E. : $x \neq 1$ et $\dfrac{2}{1-x} > 0$

$\iff x < 1$ toujours vérifié

$\forall x > 0, f(x) = \dfrac{-x^2-2x}{e^{x-1}}$

C.E. : $e^{x-1} \neq 0$ toujours vérifié

Donc : $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

Etude de la continuité en $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\ln\left(\dfrac{2}{1-x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$
  $= \ln\left(\dfrac{2}{1}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 = f(0)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x}^{\to 0}}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to e^{-1}}} = 0$

Par conséquent :
f est continue en $x = 0$ et $\mathrm{dom}_c f = \mathbb{R}$.

b)
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\overbrace{\ln\left(\underbrace{\dfrac{2}{1-x}}_{\to 0^+}\right)}^{\to -\infty} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = -\infty$ donc $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'A.H.G.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\overbrace{\ln\left(\dfrac{2}{1-x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to -\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1-x}{2} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2}\right)$

  $= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$

  Donc $\mathscr{C}_f$ admet une B.P de direction $(0x)$ quand $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x}^{\to -\infty}}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overbrace{-2x-2}^{\to -\infty}}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to +\infty}} = 0$

  Donc $\mathscr{C}_f$ admet une A.H.D d'équation $y = 0$.

c)
- dérivabilité à gauche en 0 :
  $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\frac{2}{1-x}} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1 = f'_g(0)$

- dérivabilité à droite en 0 :
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{-x^2-2x}{e^{x-1}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x-2}{e^{x-1}} = -2e = f'_d(0)$

- $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en $x = 0$ et $\mathrm{dom}_d f = \mathbb{R}^*$.
  La courbe de f admet un point anguleux à l'origine du repère et deux demi-tangentes de pentes 1, resp. $-2e$.

- $\forall x \in \mathrm{dom}_d f : f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{1-x}\left(x^2-2\right) & \text{si } x > 0 \text{ voir C.A.P} \end{cases}$

  C.A.P $f'(x) = \left(\left(-x^2-2x\right)\cdot e^{1-x}\right)' = (-2x-2)e^{1-x} - \left(-x^2-2x\right)e^{1-x} = e^{1-x}\left(x^2-2\right)$

- si $x<0 : f'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{1-x} = 0$ impossible car $\dfrac{1}{1-x} > 0$ si $x < 0$.

  si $x>0 : f'(x) = 0 \iff \underbrace{e^{1-x}}_{>0}\left(x^2-2\right) = 0 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = \underbrace{-\sqrt{2}}_{\text{à écarter}}$.

x	$-\infty$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+1$ ‖ $-2e$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\underset{0}{\max}$	$\searrow$	$\underset{\frac{-2-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}-1}}}{\min}$	$\nearrow$	0

d) On a l'équation de la tangente au point d'abscisse $a > 0$:

$$\begin{aligned}
& T_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a) \\
\iff\ & y = e^{1-a}\left(a^2-2\right)(x-a) + e^{1-a}\left(-a^2-2a\right) \\
\iff\ & y = e^{1-a}\left(\left(a^2-2\right)(x-a) + \left(-a^2-2a\right)\right) \\
& \quad A(-2;0) \in T_a \\
\iff\ & 0 = \underbrace{e^{1-a}}_{>0}\left(\left(a^2-2\right)(-2-a) - a^2 - 2a\right) \\
\iff\ & 0 = -2a^2 - a^3 + 4 + 2a - a^2 - 2a \\
\iff\ & 0 = -a^3 - 3a^2 + 4
\end{aligned}$$

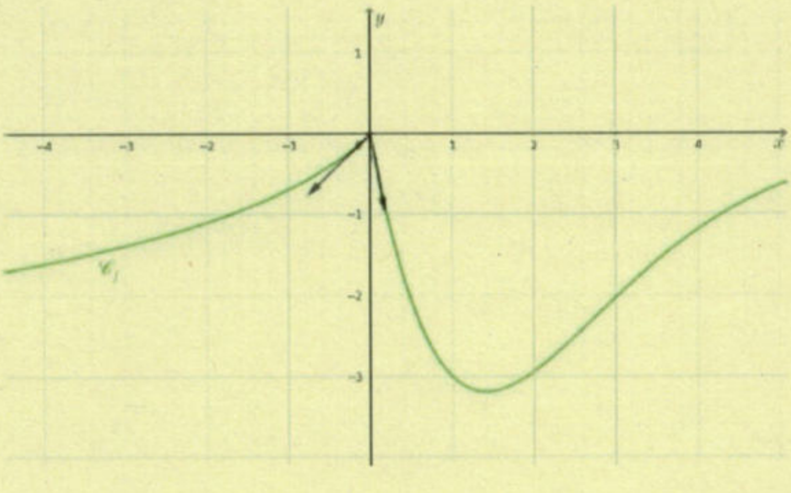
Schéma de Horner avec r. évidente $a = 1$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & -3 & 0 & 4 \\
1 & & -1 & -4 & -4 \\
\hline
 & -1 & -4 & -4 & \| \ 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\iff\ & 0 = (a-1)\left(-a^2-4a-4\right) \\
\iff\ & 0 = (a-1)(a+2)^2 \\
\iff\ & a = 1 \text{ ou } \underbrace{a=-2}_{\text{à écarter}}
\end{aligned}$$

Finalement : $T_1 \equiv y = e^{1-1}\left(1^2-2\right)(x-1) + e^{1-1}\left(-1^2-2\cdot 1\right) \iff y = -x-2$

e) Graphe de f :



Question 2 (5+4=9 points)

a) $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) + \log_5\left|2x - x^2\right| = \log_{\sqrt{5}}\sqrt{5-x}$

$$\begin{aligned} \text{C.E.} : x-1>0 &\iff x>1 \\ 2x-x^2 \neq 0 &\iff x\neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ 5-x>0 &\iff x<5 \end{aligned}$$

On en déduit le domaine de résolution : $D =]1;2[\cup]2;5[$.

$$\begin{aligned} \forall x\in D : \log_{\frac{1}{5}}(x-1) + \log_5\left|2x-x^2\right| &= \log_{\sqrt{5}}\sqrt{5-x} \\ \iff \frac{\log_5(x-1)}{\log_5\frac{1}{5}} + \log_5\left|2x-x^2\right| &= \frac{\log_5\sqrt{5-x}}{\log_5\sqrt{5}} \\ \iff -\log_5(x-1) + \log_5\left|2x-x^2\right| &= 2\log_5\sqrt{5-x} \\ \iff \log_5\left|2x-x^2\right| &= \log_5(x-1) + \log_5(5-x) \\ \iff \log_5\left|2x-x^2\right| &= \log_5\left((x-1)(5-x)\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1. cas :}}$ $2x - x^2 > 0$ et $x \in D \iff x \in]1;2[$:

$$\begin{aligned} \log_5\left|2x-x^2\right| = \log_5\left((x-1)(5-x)\right) &\iff \log_5\left(2x-x^2\right) = \log_5\left((x-1)(5-x)\right) \\ &\iff 2x-x^2 = (x-1)(5-x) \text{ car } \log_5 \text{ est une bij.} \\ &\iff 2x-x^2 = -x^2+6x-5 \\ &\iff 4x = 5 \\ &\iff x = \frac{5}{4} \in D \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2. cas :}}$ $2x - x^2 < 0$ et $x \in D \iff x \in]2;5[$:

$$\begin{aligned} \log_5\left|2x-x^2\right| = \log_5\left((x-1)(5-x)\right) &\iff \log_5\left(x^2-2x\right) = \log_5\left((x-1)(5-x)\right) \\ &\iff x^2-2x = (x-1)(5-x) \text{ car } \log_5 \text{ est une bij.} \\ &\iff x^2-2x = -x^2+6x-5 \\ &\iff 2x^2-8x+5 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 64 - 40 = 24 \qquad x_1 = \frac{8-2\sqrt{6}}{4} = \underbrace{\frac{4-\sqrt{6}}{2} \approx 0,78}_{\text{à écarter}} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{6}}{2} \approx 3,22 \in D$

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{4}; \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right\}$.

b) $13 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 9^{\frac{3-3x}{6}} - 1 \leqslant 6 \cdot 27^{\frac{2x-2}{3}}$
$\forall x \in D = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
13 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 9^{\frac{3-3x}{6}} - 1 \leqslant 6 \cdot 27^{\frac{2x-2}{3}} &\iff 13 \cdot 3^{x} \cdot 3^{-1} - 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-\frac{x}{2}} - 1 - 6 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-2} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{13}{3} \cdot 3^{x} - 6 \cdot 3^{-x} - 1 - \frac{2}{3} \cdot 3^{2x} \leqslant 0 \quad | \cdot 3^{x} \\
&\iff \frac{13}{3} \cdot (3^{x})^2 - 6 \cdot 3^{0} - 3^{x} - \frac{2}{3} \cdot (3^{x})^3 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Posons $t = 3^{x} > 0$

$$\iff -\frac{2}{3}t^3 + \frac{13}{3}t^2 - t - 6 \leqslant 0 \quad | \cdot 3$$

$$\iff -2t^3 + 13t^2 - 3t - 18 \leqslant 0$$

Schéma de Horner avec racine évidente $t = -1$

	-2	13	-3	-18
-1		2	-15	18
	-2	15	-18	$\Vert$ 0

$$\iff (t+1)\underbrace{\left(-2t^2 + 15t - 18\right)}_{p(t)} \leqslant 0 \quad (*)$$

C.A.P $p(t) = 0 \quad \Delta = 225 - 144 = 81$

$$\iff t_1 = \frac{-15-9}{-4} = 6 \text{ ou } t_2 = \frac{-15+9}{-4} = \frac{3}{2}$$

Tableau des signes de (*) :

t	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		6		$+\infty$
$t+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2t^2 + 15t - 18$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(t+1)\left(-2t^2 + 15t - 18\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement :
$-1 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2} \iff \underbrace{-1 \leqslant 3^{x}}_{\text{toujours vrai}} \leqslant \frac{3}{2} \iff x \leqslant \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2$
ou $t \geqslant 6 \iff 3^{x} \geqslant 6 \iff x \geqslant \log_3 6 = 1 + \log_3 2$
$\mathcal{S} = \left]-\infty; 1 - \log_3 2\right] \cup \left[1 + \log_3 2; +\infty\right[$

Question 3 ((1+1+1)+(2+2+3)=10 points)

A) $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln(x)$

a) C.E. : $x > 0$, donc $\mathrm{dom}g =]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\overbrace{1-x^3}^{\to 1} - 2\overbrace{\ln(x)}^{-\infty}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty}\left(\overbrace{1-x^3}^{\to -\infty} - 2\overbrace{\ln(x)}^{+\infty}\right) = -\infty$$

b) $\forall x \in \mathrm{dom}_d g =]0; +\infty[$:

$$g'(x) = -3x^2 - \frac{2}{x} = \frac{\overbrace{-3x^3 - 2}^{<0}}{\underbrace{x}_{>0}} < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

c) $g(1) = 1 - 1^3 - 2\ln(1) = 0$. Comme la fonction g est continue et strictement décroissante, on peut déduire que g est strictement positive $\forall x \in]0; 1[$ et strictement négative $\forall x \in]1; +\infty[$.

B) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} - (x-1)$.

a) C.E. : $x > 0$ et $x^2 \neq 0$, donc $\mathrm{dom}f =]0; +\infty[$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} - (x-1)\right) = -\infty$$ La courbe de f admet une A.V. en $x = 0$.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\underbrace{\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}}}_{\to 0^+} - \overbrace{(x-1)}^{\to +\infty}\right) = -\infty$$

C.A.P. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2} = 0^+$

La courbe de f n'admet pas d'A.H., mais une A.O. d'équation $y = -x + 1$ si $x \to +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x + 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = -\infty$ avec $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

b) $\forall x \in \mathrm{dom}_d f = \mathrm{dom}f$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln(x)\cdot 2x}{x^4} - 1 = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} - 1 = \frac{1 - 2\ln(x) - x^3}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	max 0	$\searrow$	$-\infty$

c) $\forall x \in \left[1; e^2\right] : f(x) \leqslant 0 :$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\int_1^{e^2} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{e^2}^1 \left(-x+1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{e^2}^1 + \int_{e^2}^1 \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1+\ln(x)}{x}\right]_{e^2}^1 \\
&= -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{1}+\frac{e^4}{2}-e^2+\frac{3}{e^2} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{e^4}{2}-e^2+\frac{3}{e^2}\text{ u.a.} \\
&\approx 19,82\text{ u.a.}
\end{aligned}$$

C.A.P. :

$$\int_{e^2}^1 \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

Par parties : $u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_{e^2}^1 - \int_{e^2}^1 \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_{e^2}^1 - \left[\frac{1}{x}\right]_{e^2}^1 \\
&= \left[-\frac{1+\ln(x)}{x}\right]_{e^2}^1
\end{aligned}$$

Question 4

(2,5+2,5=5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a)

$$\int \cos(2x)\cdot\ln(1+\cos(2x))\mathrm{d}x$$

Par parties : $u(x) = \ln\left(1+\cos(2x)\right) \qquad v'(x) = \cos(2x)$

$u'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{1+\cos(2x)} \qquad v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\ln\left(1+\cos(2x)\right) + \int \frac{\sin^2(2x)}{1+\cos(2x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\ln\left(1+\cos(2x)\right) + \int \frac{1-\cos^2(2x)}{1+\cos(2x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\ln\left(1+\cos(2x)\right) + \int \left(1-\cos(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\ln\left(1+\cos(2x)\right) + x - \frac{1}{2}\sin(2x) + c \text{ avec } c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int\left(\sin(2x)-\frac{1}{\cos(2x)}\right)^2\mathrm{d}x &= \int\left(\sin^2(2x)-2\sin(2x)\frac{1}{\cos(2x)}+\frac{1}{\cos^2(2x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{1}{2}\left(1-\cos(4x)\right)\mathrm{d}x + \int\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{2}{\cos^2(2x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x) + \ln\left|\cos(2x)\right| + \frac{1}{2}\tan(2x) + c \text{ avec } c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Question 5 (4 points)

$$\begin{aligned}
V &= \pi\left(\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 g^2(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \pi\left(\int_1^2 (\log_2(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(2^{-x+2}\right)^2\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Par parties : $u(x) = (\log_2(x))^2 \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = \dfrac{2\log_2(x)}{x\cdot\ln(2)} \qquad v(x) = x$

$$= \pi\left(\left[(\log_2(x))^2\cdot x\right]_1^2 - \frac{2}{\ln(2)}\int_1^2 \log_2(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 2^{-2x+4}\mathrm{d}x\right)$$

Par parties : $u(x) = \log_2(x) \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{x\cdot\ln(2)} \qquad v(x) = x$

$$\begin{aligned}
&= \pi\left(\left[(\log_2(x))^2\cdot x\right]_1^2 - \frac{2}{\ln(2)}\left[\log_2(x)\cdot x - \frac{1}{\ln(2)}x\right]_1^2 + 16\int_2^4 2^{-2x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \pi\left(\left[(\log_2(x))^2\cdot x\right]_1^2 - \frac{2}{\ln(2)}\left[\log_2(x)\cdot x - \frac{1}{\ln(2)}x\right]_1^2 + 16\cdot\left[\frac{2^{-2x}}{-2\ln(2)}\right]_2^4\right)\\
&= \pi\left(2 - 0 - \frac{2}{\ln(2)}\left(2 - \frac{2}{\ln(2)} - 0 + \frac{1}{\ln(2)}\right) - \frac{8}{\ln(2)}\left(2^{-8} - 2^{-4}\right)\right)\\
&= \pi\left(2 - \frac{113}{32\ln(2)} + \frac{2}{(\ln(2))^2}\right)\text{ u.v.}\\
&\approx 3,36\text{ u.v.}
\end{aligned}$$

Question 6 (8 points)

On a : $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ et $\mathcal{P} : y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{7}{4}$.

$(y-1)^2 = 10 - (x-2)^2 \Rightarrow y = \sqrt{10-(x-2)^2} + 1$ est l'équation du demi-cercle supérieur.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^5 \left(\sqrt{10-(x-2)^2} + 1 + \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x\\
&= \sqrt{10}\int_1^5 \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{\sqrt{10}}\right)^2}\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + \frac{11}{4}x\right]_1^5
\end{aligned}$$

Posons $\dfrac{x-2}{\sqrt{10}} = \cos(t) \iff x = \sqrt{10}\cos(t) + 2$

$t = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{10}}\right)$ et $\mathrm{d}x = -\sqrt{10}\sin(t)\mathrm{d}t$

Si $x = 1, t_1 = \operatorname{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

et si $x = 5, t_2 = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sqrt{10}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\cos^2(t)}\left(-\sqrt{10}\sin(t)\right)\mathrm{d}t - \frac{8}{3}\\
&= -10\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(t)\mathrm{d}t - \frac{8}{3}\\
&= -10\int_{t_1}^{t_2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t - \frac{8}{3}\\
&= -5\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t_1}^{t_2} - \frac{8}{3}\\
&= -5\left[t-\sin(t)\cos(t)\right]_{t_1}^{t_2} - \frac{8}{3}\\
&= -5\left[t-\sqrt{1-\cos^2(t)}\cos(t)\right]_{t_1}^{t_2} - \frac{8}{3}\\
&= -5\mathrm{Arccos}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + 5\mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + \left[5\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{10}}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{10}}\right]_1^5 - \frac{8}{3}\\
&= -5\mathrm{Arccos}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + 5\mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - 5\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} - \frac{8}{3}\\
&= -5\mathrm{Arccos}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + 5\mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + \frac{1}{3}\text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Question 7 (5+5+1=11 points)

$f_m(x) = m(x+1) - \ln|x-m|$ où m est un paramètre réel.

a)
- C.E. : $x - m \neq 0 \iff x \neq m$ donc $\mathrm{dom} f_m = \mathbb{R}\setminus\{m\}$
- $m<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{m(x+1)}_{\to-\infty} - \underbrace{\ln|x-m|}_{\to+\infty}\right) = -\infty$
- $m<0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{m(x+1)}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln|x-m|}_{\to+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(x+1)}_{\to-\infty}\left(\underbrace{m}_{<0} - \underbrace{\frac{\ln|x-m|}{x+1}}_{\to 0 \text{ voir C.A.P}}\right) = +\infty$
- $m>0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{m(x+1)}_{\to-\infty} - \underbrace{\ln|x-m|}_{\to+\infty}\right) = -\infty$
- $m>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{m(x+1)}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln|x-m|}_{\to+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\left(\underbrace{m}_{>0} - \underbrace{\frac{\ln|x-m|}{x+1}}_{\to 0 \text{ voir C.A.P}}\right) = +\infty$

  C.A.P : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln|x-m|}{x+1} \overset{H}{=} \lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x-m} = 0$
- $m=0$: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(-\ln|x|) = -\infty$
- La courbe de f_m n'admet pas d'asymptotes horizontales.
- $\lim\limits_{x\to m^{\pm}}\left(\underbrace{m(x+1)}_{\to m^2+m} - \underbrace{\ln\overbrace{|x-m|}^{\to 0^+}}_{\to-\infty}\right) = +\infty$

  La courbe de f_m admet une A.V. d'équation $x = m$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{m(x+1)-\ln|x-m|}{x}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(m+\underbrace{\dfrac{m}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\dfrac{\ln|x-m|}{x}}_{\to 0 \text{ voir C.A.P.}}\right)=m$

C.A.P. : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\ln|x-m|}{x}\overset{H}{=}\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{x-m}=0$

Il faut distinguer 2 cas :

Si $\boxed{m=0:}$

La courbe de f_m admet une branche parabolique de direction (Ox).

Si $\boxed{m\neq 0:}$

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f_m(x)-mx)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(m-\underbrace{\ln|x-m|}_{\to+\infty}\right)=-\infty$$

La courbe de f_m admet une branche parabolique de direction $y=mx$.

b) $\forall x\in \mathrm{dom}_d f_m=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ on a : $f_m'(x)=m-\dfrac{1}{x-m}=\dfrac{mx-m^2-1}{x-m}=\dfrac{p_m(x)}{x-m}$

$f_m'(x)=0 \iff x=\dfrac{m^2+1}{m}\quad \forall m\neq 0$ et si $m=0$: $f_0'(x)=-\dfrac{1}{x}\neq 0$

$\boxed{\text{si } m<0:}$

$\dfrac{m^2+1}{m}=m+\underbrace{\dfrac{1}{m}}_{<0}<m$

x	$-\infty$		$\frac{m^2+1}{m}$		m		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f_m	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

$\boxed{\text{si } m>0:}$

$\dfrac{m^2+1}{m}=m+\underbrace{\dfrac{1}{m}}_{>0}>m$

x	$-\infty$		m		$\frac{m^2+1}{m}$		$+\infty$
$p_m(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-m$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_m'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f_m	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

avec $f_m\left(\dfrac{m^2+1}{m}\right)=m\cdot\left(\dfrac{m^2+1}{m}+1\right)-\ln\left|\dfrac{m^2+1}{m}-m\right|=m^2+1+m+\ln|m|$

$\boxed{\text{si } m=0:}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)=-\frac{1}{x}$		$+$	‖	$-$	
f_0	$-\infty$	→	$+\infty$ ‖ $+\infty$	→	$-\infty$

c) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{m\}$ on a : $f_m''(x)=\dfrac{1}{(x-m)^2}>0$

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$f_m''(x)$	$+$	‖	$+$
$\mathscr{C}_{f_m}$	$\cup$	‖	$\cup$