EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	15.05.23	*Durée :*	08:15 - 12:15
Discipline :	Mathématiques II - Informatique - Mathématiques 2	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG

Question 1 (0,5+2+3+3+1+2,5+2=14)

1. $\forall x \leqslant 1 : f(x) = 1 + \ln(2-x)$ CE : $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ toujours vérifié

   $\forall x > 1 : f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$ CE : $x > 0$ toujours vérifié

   Donc : $D_f =]-\infty; +\infty[$

2. a) $f(1) = 1 + \ln(2-1) = 1$

   b) Étude de la continuité à droite en $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} e^{\overbrace{\sqrt{x}\ln x}^{\to 0}} = e^0 = 1 = f(1)$

   Donc : f continue à droite en 1.

   c) Étude de la continuité à gauche en $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(1 + \ln\overbrace{(2-x)}^{\to 1}\right) = 1 = f(1)$

   Donc : f continue à gauche en 1.

   d) Par conséquent : f continue en 1.

3. a) Étude de la dérivabilité à droite en $x_0 = 1$:

   $$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{Hôpital}{=} \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)' = \lim_{x\to1^+} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) e^{\sqrt{x}\ln x}$$

   $$= \lim_{x\to1^+} \left(\overbrace{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\to 1}\right) \underbrace{e^{\sqrt{x}\ln x}}_{\to 1} = 1 = f'_d(1)$$

   Donc : f dérivable à droite en 1.

   b) Étude de la dérivabilité à gauche en $x_0 = 1$:

   $$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{Hôpital}{=} \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} (1 + \ln(2-x))' = \lim_{x\to1^-} \frac{-1}{2-x} = -1 = f'_g(1)$$

   Donc : f dérivable à gauche en 1.

   c) $f'_d(1) \neq f'_g(1)$: f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

   Le point A(1;1) est un point anguleux de G_f.

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\sqrt{x}\ln x}^{\to+\infty}} = +\infty$ G_f n'admet pas d'AH quand $x \to +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{\sqrt{x}\ln x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}$ «$\frac{\infty}{\infty}$» fi

   $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}\ln x}}{e^{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}\ln x - \ln x} = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{e^{(\sqrt{x}-1)\ln x}}^{\to+\infty} = +\infty$$

   Donc : G_f admet une BP dans la direction de (Oy) quand $x \to +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\underbrace{\ln\overbrace{(2-x)}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right) = +\infty$ $\qquad$ G_f n'admet pas d'AH quand $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{1+\ln(2-x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} \qquad \text{«}\frac{\infty}{\infty}\text{» fi}$$

$$\overset{Hôpital}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2} = 0$$

Donc : G_f admet une BP dans la direction de $(0x)$ quand $x\to-\infty$.

5. a) $\forall x\leqslant 1$: $\quad f'(x) = \big(1+\ln(2-x)\big)' = \frac{-1}{2-x} = \frac{1}{x-2}$;

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Donc: $\forall x\leqslant 1$: $f'(x)<0$

b) $\forall x>1$: $f'(x) = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}\ln x} = \overbrace{(2+\ln x)}^{>0}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}\ln x}}_{>0} > 0$

car : $\forall x>1$: $\ln x>0 \Rightarrow 2+\ln x>0$

6. a) $\forall x\leqslant 1$: $\quad f''(x) = \left[\frac{1}{x-2}\right]' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$

et la concavité de G_f est tournée vers le bas

b) $\forall x>1$: $f''(x) = \left[\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}\ln x}\right]'$

$$= \left[\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right]' e^{\sqrt{x}\ln x} + \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\left[e^{\sqrt{x}\ln x}\right]'$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x} - (2+\ln x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}\cdot e^{\sqrt{x}\ln x} + \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}\ln x}$$

$$= \frac{2-(2+\ln x)}{4x\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}\ln x} + \frac{(2+\ln x)^2}{4x}e^{\sqrt{x}\ln x}$$

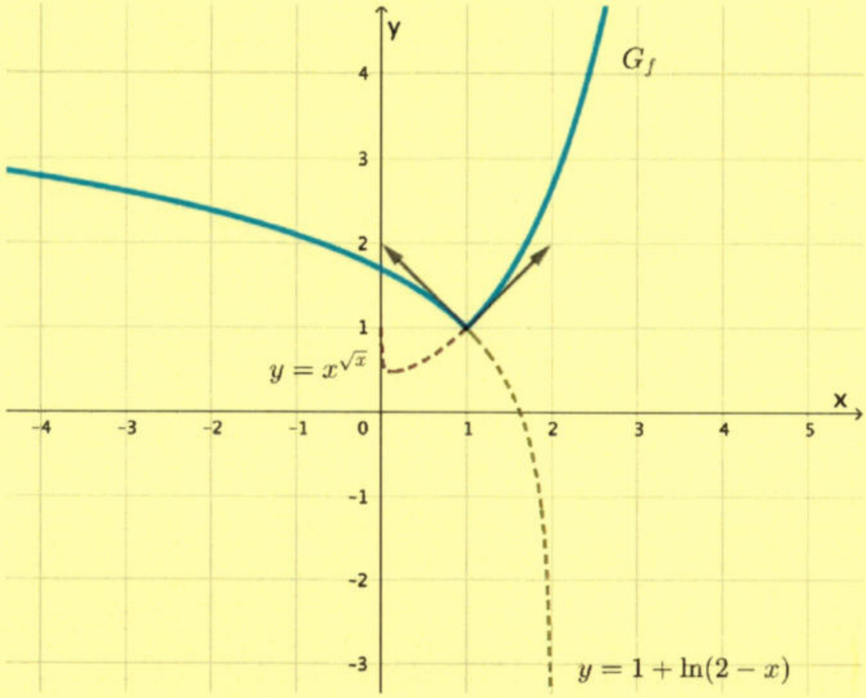
$$= \left[\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}} + \frac{4+4\ln x+\ln^2 x}{4x}\right]e^{\sqrt{x}\ln x}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}\ln^2 x + \overbrace{(4\sqrt{x}-1)}^{>0}\overbrace{\ln x}^{>0} + 4\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}\right]e^{\sqrt{x}\ln x} > 0$$

et la concavité de G_f est tournée vers le haut

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	-1 ‖ 1	+	
$f''(x)$		-	‖	+	
Concavité		Vers le bas	‖	Vers le haut	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1 min	↗	$+\infty$

7. Représentation graphique



Question 2 (5+2=7)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$: $4^{x-1} + m2^{x+1} + 4 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (2^2)^{x-1} + m2^{x+1} + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} + m2^{x+1} + 4 = 0 \quad | \cdot 2^2$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x} + m2^{x+3} + 4 \cdot 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + m \cdot 2^x 2^3 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 8m \cdot 2^x + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x > 0. \\ y^2 + 8my + 16 = 0 \end{cases}$$

Résolvons l'équation $y^2 + 8my + 16 = 0$ (2).
$a = 1$;$b = 8m$;$c = 16$;
$\Delta = 64m^2 - 64 = 64(m^2 - 1)$ avec $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$m^2 - 1$		+	0	-	0	+	
Δ		+	0	-	0	+	
Nombre de solutions de (2)		2	1	0	1	2	

Si $m = 1$: (2) $\Leftrightarrow y^2 + 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (y + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -4 < 0$
et (1) n'admet pas de solution.

Si $m = -1$: (2) $\Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 4 > 0$
et (1) admet une solution.

Si $m \in]-1;1[$: (2) n'admet aucune solution et (1) n'admet pas de solution.

Si $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$(2) \Leftrightarrow\ y_1 = \frac{-8m+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $y_2 = \frac{-8m-\sqrt{\Delta}}{2}$

$S = y_1 + y_2 = \frac{-8m+\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{-8m-\sqrt{\Delta}}{2} = -8m$ et

$P = y_1 \cdot y_2 = \frac{-8m+\sqrt{\Delta}}{2} \cdot \frac{-8m-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{64m^2-64m^2+64}{4} = 16 > 0$

Si $m \in]-\infty;-1[$: $S > 0$ et $P > 0$,

(2) admet deux solutions positives et (1) admet deux solutions.

Si $m \in]1;+\infty[$: $S < 0$ et $P > 0$,

(2) admet deux solutions négatives et (1) n'admet pas de solution.

2. On choisit $m = -2$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $4^{x-1} - 2 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x > 0 \\ y^2 - 16y + 16 = 0 \ \left(\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x > 0 \\ y = 8 + 4\sqrt{3} \text{ ou } y = 8 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 8 + 4\sqrt{3} \text{ ou } 2^x = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2\left(8 + 4\sqrt{3}\right) \text{ ou } x = \log_2\left(8 - 4\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 4\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ou } x = \log_2 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \log_2\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ou } x = 2 + \log_2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Donc : $S = \left\{2 + \log_2\left(2 + \sqrt{3}\right); 2 + \log_2\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}$

Question 3 (2+2,5+2,5=7)

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin 2x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\overbrace{-2\sin 2x \cdot \ln x}^{\to 0}} = 1$$

car: $\lim_{x\to 0}(-2\sin 2x \cdot \ln x)$ fi «$0 \cdot \infty$»

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{-1}{\sin 2x}}$ fi «$\frac{\infty}{\infty}$»

$$\overset{Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{2\sin 2x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos 2x}}_{\to 1} = 0$$

2. CE : x>0

$\forall x \in]0;+\infty[$: $2 - \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x} = 2\log_4 x^2 - 3\log_8 x$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^2 - \frac{\log_2 x^{\frac{1}{2}}}{\log_2 \frac{1}{2}} = 2\frac{\log_2 x^2}{\log_2 2^2} - 3\frac{\log_2 x}{\log_2 2^3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \log_2 x^2 - \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 x = 2\log_2 x - \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4 = \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4 = \log_2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$$

$\Leftrightarrow x = 16$ Donc : $S = \{16\}$

3. CE : $x \neq 1$ et $2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$\forall x \in]-\sqrt{2};1[\cup]1;\sqrt{2}[$:

$$\begin{aligned} & 2\ln|x-1| - \ln(2-x^2) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\ln|x-1| \geqslant \ln(2-x^2) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(|x-1|)^2 \geqslant \ln(2-x^2) \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 \geqslant 2 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 \geqslant 2 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2x - 1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

or : $2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\Delta = 12)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}37 \text{ ou } x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}37$$

d'où :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		x_1		1		x_2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 1$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	‖	+	

et $S =]-\sqrt{2};x_1] \cup [x_2;\sqrt{2}[$

Question 4 (1,5+3,5=5)

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-3x+8}{(1-x)(x^2+2)} = \frac{ax+b}{x^2+2} + \frac{c}{1-x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2-3x+8}{(1-x)(x^2+2)} = \frac{(ax+b)(1-x)}{(1-x)(x^2+2)} + \frac{c(x^2+2)}{(1-x)(x^2+2)} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 8 = (ax+b)(1-x) + c(x^2+2) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 8 = ax + b - ax^2 - bx + cx^2 + 2c \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 8 = (-a+c)x^2 + (a-b)x + (b+2c) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -a \quad + c = 1 \\ a - b \quad = -3 \\ \quad b + 2c = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} c = a + 1 \\ b = a + 3 \\ a + 3 + 2(a+1) = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = \frac{x^2-3x+8}{(1-x)(x^2+2)} = \frac{x+4}{x^2+2} + \frac{2}{1-x}$

2. $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2+2}dx + \int \frac{4}{x^2+2}dx + \int \frac{2}{1-x}dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot x}{x^2+2}dx + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}dx + 2 \cdot (-1) \int \frac{(-1)}{1-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + 2\sqrt{2}\ \text{Arctan}\frac{x}{\sqrt{2}} - 2\ln|1-x| + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

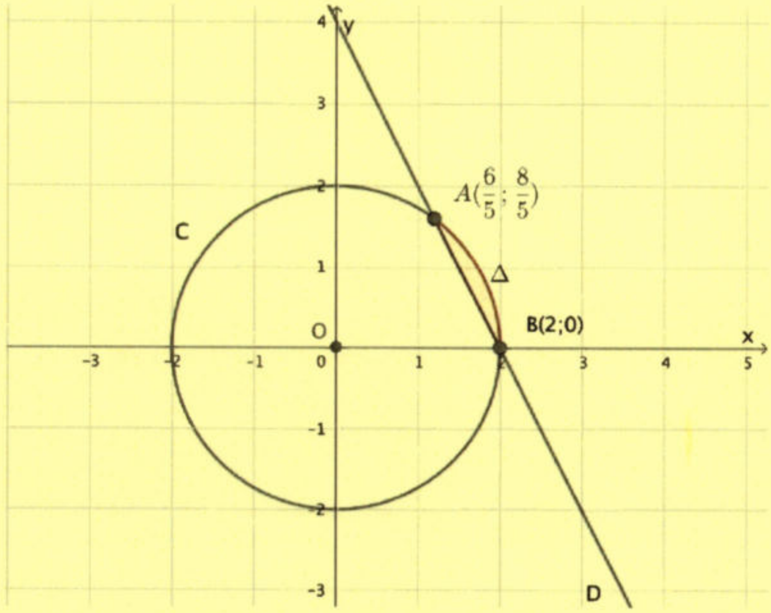
Question 5 (2+5+2=9)

1. $M(x;y) \in C \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(-2x+4)^2=4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x^2+16-16x=4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-16x+12=0 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ou } x=\frac{6}{5} \\ y=-2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ et } y=0 \\ x=\frac{6}{5} \text{ et } y=\frac{8}{5} \end{cases}$

Les points d'intersection sont $A\left(\frac{6}{5}\ ;\ \frac{8}{5}\right)$ et $B(2;0)$.



2. On a : $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=4-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{4-x^2}$ ou $y=-\sqrt{4-x^2}$.
Considérons la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.
Le graphe G_f de f est le demi-cercle situé dans le demi-plan positif.

Position de D par rapport à G_f :

x	-2		$\frac{6}{5}$		2
Position de D par rapport à G_f		D au-dessus de G_f	D coupe G_f	D en dessous de G_f	D coupe G_f

Donc, l'aire de la surface Δ cherchée :

$\text{Aire}(\Delta) = \int_{\frac{6}{5}}^{2}(f(x)-y_D)dx$

$= \underbrace{\int_{\frac{6}{5}}^{2}\sqrt{4-x^2}dx}_{I} - \underbrace{\int_{\frac{6}{5}}^{2}(-2x+4)\,dx}_{J}$

$= \left(2\cdot \text{Arccos}\frac{3}{5}-\frac{24}{25}\right)-\frac{16}{25}$

$= 2\cdot \text{Arccos}\frac{3}{5}-\frac{8}{5}$ u.a.

Calcul à part:

On pose : $x = 2\cos t$; $dx = -2\sin t dt$;

$\cos t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \text{Arccos}\frac{x}{2}$

$x = \frac{6}{5} \Rightarrow t = \text{Arccos}\frac{3}{5}$;

$x = 2 \Rightarrow t = 0$

On a : $\sqrt{4 - 4\cos^2 t} = 2\sqrt{1-\cos^2 t}$
$= 2\sqrt{\sin^2 t} = 2\sin t$

car si $0 \leqslant t \leqslant \text{Arccos}\frac{3}{5}$ alors $\sin t \geqslant 0$

I = $\int_{\frac{6}{5}}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$
$= \int_{\text{Arccos}\frac{3}{5}}^{0} \sqrt{4 - 4\cos^2 t} \cdot (-2)\sin t dt$
$= -4\int_{\text{Arccos}\frac{3}{5}}^{0} \sin^2 t\, dt$
$= -4\int_{\text{Arccos}\frac{3}{5}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$
$= \int_{\text{Arccos}\frac{3}{5}}^{0} (-2 + 2\cos 2t)dt$
$= [-2t + \sin 2t]_{\text{Arccos}\frac{3}{5}}^{0}$
$= 2\text{Arccos}\frac{3}{5} - \sin\left(2\text{Arccos}\frac{3}{5}\right)$
$= 2\text{Arccos}\frac{3}{5} - 2\sin\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right) \cdot \cos\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right)$
$= 2 \cdot \text{Arccos}\frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$
$= 2 \cdot \text{Arccos}\frac{3}{5} - \frac{24}{25}$

car: $\cos\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

et $\sin^2\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right) + \cos^2\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right) = 1$

donc : $\sin\left(\text{Arccos}\frac{3}{5}\right) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

J= $\int_{\frac{6}{5}}^{2} (-2x+4)dx = [-x^2+4x]_{\frac{6}{5}}^{2} = 4 + \frac{36}{25} - \frac{24}{5} = \frac{16}{25}$

3. Volume du solide de révolution S :

$$\text{Volume}(S) = \pi\int_{\frac{6}{5}}^{2}\left(f^2(x) - y_D{}^2\right)dx$$
$$= \pi\left[\int_{\frac{6}{5}}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx - \int_{\frac{6}{5}}^{2}(-2x+4)^2\,dx\right]$$
$$= \pi\left[\int_{\frac{6}{5}}^{2}(4 - x^2 - 4x^2 + 16x - 16)\,dx\right]$$
$$= \pi\left[\int_{\frac{6}{5}}^{2}(-5x^2 + 16x - 12)\,dx\right]$$
$$= \pi\left[-\frac{5}{3}x^3 + 8x^2 - 12x\right]_{\frac{6}{5}}^{2}$$
$$= \pi\left[\left(\frac{-40}{3} + 32 - 24\right) - \left(\frac{-72}{25} + \frac{288}{25} - \frac{72}{5}\right)\right]$$
$$= \pi\left[\frac{-16}{3} - \left(\frac{-144}{25}\right)\right]$$
$$= \frac{32\pi}{75} \text{ u.v.}$$

Question 6 (2+4=6)

1. $$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}\, dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$
$$= \left[-\ln(1+\cos^2 x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \ln\left(1+\cos^2\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \ln\frac{5}{4}$$

2. $$J = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x}\sin 2x\, dx}_{\text{ipp}}$$

ipp : $u(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = \sin 2x$
$u'(x) = -2e^{-2x}$; $v(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Donc : $$J = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x}\cos 2x\, dx}_{ipp}$$

ipp : $u(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = \cos 2x$
$u'(x) = -2e^{-2x}$; $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

et $$J = -\frac{1}{2}\left[e^{\frac{-\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} - e^0\cos 0\right] - \left\{\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x}\sin 2x\, dx}_{J}\right\}$$
$$J = -\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}\left[e^{\frac{-\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} - e^0\sin 0\right] - J$$
$$2J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{\frac{-\pi}{2}}\right]$$
$$J = \frac{1}{4}\left(1 - e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$$

Question 7 (5+5+2=12)

On a : $\boldsymbol{m > 0}$

1. $\mathrm{Dom}_{f_m} = \mathbb{R}$

Si $\boldsymbol{m = 1}$: $f_1(x) = \mathrm{e}^x$
$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$
0,5 $\quad C_1$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ quand $x \to -\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} \overset{Hôpital}{=} \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$$
C_1 admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des y quand $x \to +\infty$.

Dans la suite on suppose $\boldsymbol{m \neq 1}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(m-1)\cdot x + \underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}]$

si $0 < \boldsymbol{m} < 1$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [\underbrace{(m-1)\cdot x}_{\to-\infty} + \underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}]$ fi «$\infty - \infty$» car $m-1<0$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \overbrace{e^{m\cdot x}}^{\to+\infty} [\underbrace{\frac{(m-1)\cdot x}{e^{m\cdot x}}}_{\to 0} + 1] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{(m-1)\cdot x}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}} \overset{Hôpital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{m-1}{\underbrace{m\, e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}} = 0$

2 C_m n'admet pas d'asymptote horizontale quand $x\to+\infty$.

si $\boldsymbol{m} > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [\underbrace{(m-1)\cdot x}_{\to+\infty} + \underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}] = +\infty$ $(m-1>0)$

C_m n'admet pas d'asymptote horizontale quand $x\to+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{(m-1)\cdot x + e^{m\cdot x}}^{\to+\infty}}{x}$ fi «$\frac{\infty}{\infty}$»

1 $= \lim\limits_{x\to+\infty} ((m-1) + \overbrace{m\cdot \underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to+\infty}}^{\to+\infty}) = +\infty$

C_m admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des y quand $x\to+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [(m-1)\cdot x + \underbrace{e^{m\cdot x}}_{\to 0}]$

si $\boldsymbol{0 < m < 1}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (m-1)\cdot x = +\infty$ $(m-1<0)$

1,5 C_m n'admet pas d'asymptote horizontale quand $x\to-\infty$.

si $\boldsymbol{m > 1}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (m-1)\cdot x = -\infty$ $(m-1>0)$

C_m n'admet pas d'asymptote horizontale quand $x\to-\infty$.

C_m admet une asymptote oblique d'équation $y = (m-1)\cdot x$ quand $x\to-\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'_m(x) = [(m-1)\cdot x + e^{m\cdot x}]' = m - 1 + m\cdot e^{m\cdot x}$

1 $f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow m-1+m\cdot e^{m\cdot x} \geq 0 \Leftrightarrow me^{m\cdot x} \geq 1-m$ $\quad | : m>0$

$\Leftrightarrow e^{m\cdot x} \geq \frac{1-m}{m}$

1 **si** $\boldsymbol{m > 1}$: $1-m<0 \Rightarrow \frac{1-m}{m} < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^{m\cdot x} > 0 > \frac{1-m}{m}$

Donc : $f'_m(x) > 0$ et f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

si $\boldsymbol{0 < m < 1}$: $1-m>0 \Rightarrow \frac{1-m}{m} > 0$

1,5 $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{m\cdot x} \geq \frac{1-m}{m} \Leftrightarrow m\cdot x \geq \ln\frac{1-m}{m}$ $\quad | : m>0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{m}\ln\frac{1-m}{m}$

x	$-\infty$		$a = \frac{1}{m}\ln\frac{1-m}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		-	0	+	

En résumé :

Si $0 < m < 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$ AO	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$ BP

Si $m = 1$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1{}'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	0 AH	$\nearrow$	$+\infty$ BP

Si $m > 1$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$ AO	$\nearrow$	$+\infty$ BP

1,5 avec : AO $\equiv y = (m-1)x$ et BP branche parabolique dans la direction de (Oy)

3. $f_m(0) = (m-1)\cdot 0 + e^{m\cdot 0} = 1$. Donc: $B(0;1) \in C_m$;
$f'_m(0) = m - 1 + m \cdot e^{m\cdot 0} = 2m - 1$
Δ est la tangente à C_m au point B d'abscisse 0.
On a : $\Delta \equiv y = f'_m(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = (2m-1)x + 1$
$A(5;2) \in \Delta \Leftrightarrow 2 = (2m-1)\cdot 5 + 1 \Leftrightarrow 10m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$ Donc: $\Delta \equiv y = \frac{1}{5}x + 1$
AO $\equiv y = \left(\frac{3}{5} - 1\right)x \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x$