EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES					
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT					
Date :	15.05.23	*Durée :*	08:15 - 12:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques II - Informatique - Mathématiques 2	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG		

Question 1 (0,5+2+3+3+1+2,5+2=14)

Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \begin{cases} 1+\ln(2-x) & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité de f en 1.
3. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement.
4. Étudier le comportement asymptotique du graphe G_f de f .
5. Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations.
6. Étudier la concavité du graphe G_f de f et dresser le tableau de concavité.
7. Représenter le graphe G_f de f dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm.

Question 2 (5+2=7)

m est un nombre réel quelconque.

1. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $4^{x-1} + m\, 2^{x+1} + 4 = 0$.
2. Résoudre cette équation pour $m = -2$.

Question 3 (2+2,5+2,5=7)

1. Calculer: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin 2x}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2 - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = 2\log_4 x^2 - 3\log_8 x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2\ln|x-1| - \ln(2-x^2) \geq 0$.

Question 4 (1,5+3,5=5)

Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+8}{(1-x)(x^2+2)}$.

1. Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}: f(x) = \frac{ax+b}{x^2+2} + \frac{c}{1-x}$.
2. Calculer l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$.

Question 5 (2+5+2=9)

Considérons le cercle $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = 4$ et la droite $D \equiv y = -2x + 4$.

1. Représenter ces deux courbes dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm. Établir les coordonnées de leurs points d'intersection.
2. Calculer l'aire de la surface Δ délimitée par ces deux courbes dans le premier quadrant du plan.
3. Calculer le volume du solide S obtenu par la rotation de la surface Δ autour de l'axe des x .

Question 6 (2+4=6)

Calculer les intégrales définies suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$

2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x} \sin 2x \ dx$

Question 7 (5+5+2=12)

Soit f_m la fonction réelle définie par $f_m(x) = (m-1)\cdot x + e^{m\cdot x}$ où m est un paramètre réel strictement positif. C_m est la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé.
En discutant suivant les valeurs du paramètre réel strictement positif m :

1. Indiquer le domaine de définition de f_m . Étudier le comportement asymptotique du graphe C_m de f_m.
2. Étudier les variations de f_m . Dresser un tableau des variations pour chaque cas de figure. On ne demande pas de préciser la valeur d'un extremum éventuel.
3. Soit Δ la tangente à C_m au point d'abscisse 0. Établir une équation de Δ . Déterminer la valeur de m pour laquelle la droite Δ passe par le point A(5;2). Pour cette valeur de m , représenter dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm : le graphe C_m , Δ et les asymptotes éventuelles de C_m.

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$