LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHEMATIQUES II	CB	*Durée de l'épreuve : 08:15 - 12:25* *Date de l'épreuve : 17/05/2022*

Question 1 (5 + 5 + 4 = 14 points)

a) $\boxed{\log_2\left|1-2^x\right| \le \log_2 12 - |x|}$

$\underline{C.E.}$ $1-2^x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 0$

$(\forall x \in D = \mathbb{R}^*)$:

$$\log_2\left|1-2^x\right| \le \log_2 12 - |x|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left|1-2^x\right|}{\ln 2} \le \frac{\ln 12}{\ln 2} - \frac{\ln 2^{|x|}}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|1-2^x\right| + \ln 2^{|x|} \le \ln 12$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|1-2^x\right| \cdot 2^{|x|}\right) \le \ln 12$$

$$\Leftrightarrow \left|1-2^x\right| \cdot 2^{|x|} \le 12 \quad (I)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left\|1-2^x\right\|$		$1-2^x$	0	2^x-1	

$\boxed{1°)\text{cas} : x \in \left]-\infty ; 0\right[}$

$(I) \Leftrightarrow (1-2^x)2^{-x} \le 12 \Leftrightarrow 2^{-x}-1 \le 12 \Leftrightarrow 2^{-x} \le 13 \Leftrightarrow -x\ln 2 \le \ln 13 \Leftrightarrow x \ge -\frac{\ln 13}{\ln 2}$

$S_1 = \left[-\frac{\ln 13}{\ln 2} ; 0\right[$

$\boxed{2°)\text{cas} : x \in \left]0 ; +\infty\right[}$

$(I) \Leftrightarrow (2^x-1)2^x \le 12 \Leftrightarrow 2^{2x}-2^x-12 \le 0 \Leftrightarrow (2^x+3)(2^x-4) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le 2^x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2$

$S_2 = \left]0 ; 2\right]$

$\boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{\ln 13}{\ln 2} ; 0\right[\cup \left]0 ; 2\right]}$

b) $\boxed{x^{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x}^{\ln x} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\cdot\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln\sqrt[3]{x}} \quad (*)}$

$\underline{C.E.}$ $x > 0$

Tableau des variations

x	0		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-2}{6x}$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$\underbrace{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{4}{9}}_{\approx 0,94}$	$\nearrow$	

Donc $(\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[) : f(x) > 0$

$$e^{\sqrt{x}\cdot\ln x} = e^{\ln x\cdot\ln\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot\ln x = \ln x \cdot \ln\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \ln x\left[\sqrt{x}-\tfrac{1}{3}\ln x\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{\boxed{\sqrt{x}-\tfrac{1}{3}\ln x}}_{>0\ (\forall x \in]0;+\infty[)} = 0$$

Par conséquent $(*)$ admet une seule solution à savoir $x = 1$ et $\boxed{S = \{1\}}$

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{\sqrt{x}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\boxed{\sqrt{x}}}^{\to+\infty}\overbrace{\boxed{\ln\left(1+e^{-x}\right)}}^{\to0}}$ (Forme indéterminée : "$\infty\cdot0$")

<u>Limite de l'exposant</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\sqrt{x}}}_{\to+\infty}\underbrace{\boxed{\ln\left(1+e^{-x}\right)}}_{\to0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\ln\left(1+e^{-x}\right)}}^{\to0}}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}}_{\to0}}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}}{\frac{-1}{2x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\overbrace{\boxed{e^{-x}x^{\frac{3}{2}}}}^{\to0}}{\underbrace{\boxed{1+e^{-x}}}_{\to1}}=0$$

<u>C.à p.</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^{\frac{3}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{x^{\frac{3}{2}}}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{e^{x}}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{e^{x}}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{4}}{\underbrace{\boxed{x^{\frac{1}{2}}e^{x}}}_{\to+\infty}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{\sqrt{x}}=e^{0}=1$

<u>Question 2 (2 + 4 + 2 + 4 + 4 = 16 points)</u>

a) *<u>C.E.</u>* $x>0$

$\text{Dom} f=\text{Dom} f'=\text{Dom} f''=\left]0\,;+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\ln^2x-5\ln x+2\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{\boxed{\ln x}}_{\to-\infty}\underbrace{\boxed{\left(2\ln x-5+\frac{2}{\ln x}\right)}}_{\to-\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\ln x}}_{\to+\infty}\underbrace{\boxed{\left(2\ln x-5+\frac{2}{\ln x}\right)}}_{\to+\infty}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\frac{2\ln^2x}{x}}}_{\to0}-\underbrace{\boxed{\frac{5\ln x}{x}}}_{\to0}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{x}}}_{\to0}\right)=0$$

<u>C.à p.</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{2\ln^2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{4\ln x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{5\ln x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}=0$

<u>Conclusions</u> :

C_f admet une *A.V.* $\equiv x=0$ (à droite) et une *B.P.D.* dont la direction asymptotique est celle de (Ox).

b) $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\ f'(x)=4\ln x\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x}=\frac{4\ln x-5}{x}$

Tableau des variations

x	0		$e^{\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\ f''(x)=\dfrac{\frac{4}{x}\cdot x-(4\ln x-5)}{x^2}=\dfrac{9-4\ln x}{x^2}$

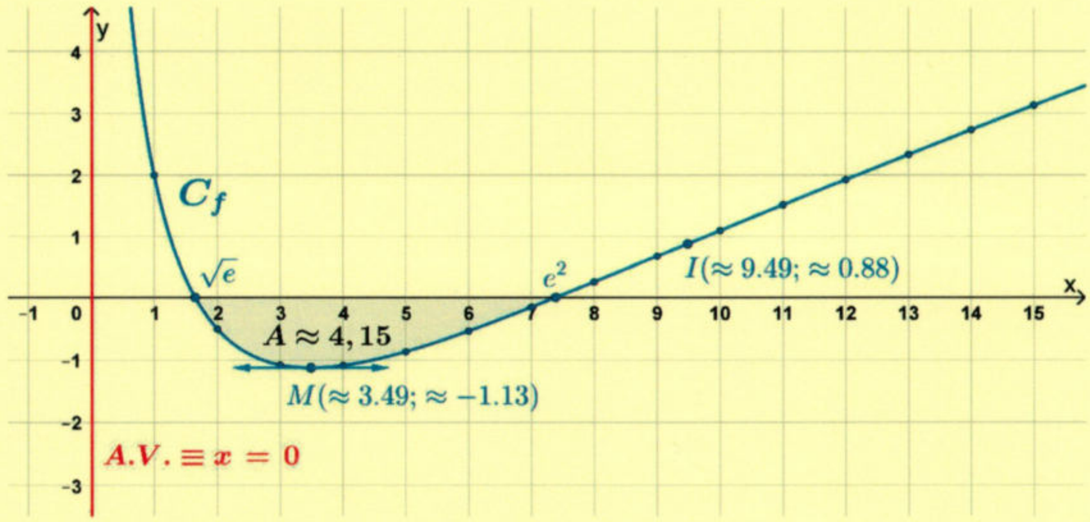
Tableau de concavité

x	0		$e^{\frac{9}{4}}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
C_f	$\Vert$	$\cup$	$P.I.$	$\cap$	

$I\left(e^{\frac{9}{4}};\dfrac{7}{8}\right)$ est le seul point d'inflexion de C_f.

c) Représentation graphique

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	2	−0,5	−1,1	−1,1	−0,9	−0,5	−0,2	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1



d) Équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a de C_f

$t_a:\quad y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$\Leftrightarrow\ y=\frac{4\ln a-5}{a}(x-a)+2\ln^2 a-5\ln a+2$

$\Leftrightarrow\ y=\frac{4\ln a-5}{a}x+2\ln^2 a-9\ln a+7$

$O(0;0)\in t_a\Leftrightarrow 0=\frac{4\ln a-5}{a}0+2\ln^2 a-9\ln a+7\Leftrightarrow \ln a=1\vee\ln a=\frac{7}{2}\Leftrightarrow a=e\vee a=e^{\frac{7}{2}}$

Il y a deux tangentes à C_f passant par l'origine, à savoir :

$t_e:\ y=f'(e)x\Leftrightarrow y=\frac{4\ln e-5}{e}x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{e}x$

$t_{e^{\frac{7}{2}}}:\ y=f'\left(e^{\frac{7}{2}}\right)x\Leftrightarrow y=\dfrac{4\ln e^{\frac{7}{2}}-5}{e^{\frac{7}{2}}}x\Leftrightarrow y=\dfrac{9}{e^{\frac{7}{2}}}x$

e) $C_f \cap (Ox)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x-5\ln x+2=0 \Leftrightarrow (2\ln x-1)(\ln x-2)=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \vee \ln x=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{e} \vee x=e^2$

$C_f \cap (Ox)=\left\{A\left(\sqrt{e}\,;0\right);B\left(e^2\,;0\right)\right\}$

$$A=-\int_{\sqrt{e}}^{e^2}\left(2\ln^2 x-5\ln x+2\right)dx=2\underbrace{\boxed{\int_{e^2}^{\sqrt{e}}\ln^2 x\,dx}}_{A_1}-5\underbrace{\boxed{\int_{e^2}^{\sqrt{e}}\ln x\,dx}}_{A_2}+2\underbrace{\boxed{\int_{e^2}^{\sqrt{e}}dx}}_{A_3}$$

Calcul de A_1 et A_2 par parties

$u_1(x)=\ln^2 x$	$v_1(x)=x$
$u_1'(x)=\frac{2\ln x}{x}$	$v_1'(x)=1$

$u_2(x)=\ln x$	$v_2(x)=x$
$u_2'(x)=\frac{1}{x}$	$v_2'(x)=1$

$$A_1=\left[x\ln^2 x\right]_{e^2}^{\sqrt{e}}-2\int_{e^2}^{\sqrt{e}}\ln x\,dx=\frac{\sqrt{e}}{4}-4e^2-2\left\{\left[x\ln x\right]_{e^2}^{\sqrt{e}}-\int_{e^2}^{\sqrt{e}}x\,dx\right\}=\frac{5\sqrt{e}}{4}-2e^2$$

$$A_2=\left[x\ln x-x\right]_{e^2}^{\sqrt{e}}=-\frac{\sqrt{e}}{2}-e^2$$

$$A_3=\left[x\right]_{e^2}^{\sqrt{e}}=\sqrt{e}-e^2$$

$$A=2A_1-5A_2+2A_3=2\left(\frac{5\sqrt{e}}{4}-2e^2\right)-5\left(-\frac{\sqrt{e}}{2}-e^2\right)+2\left(\sqrt{e}-e^2\right)=\boxed{7\sqrt{e}-e^2\,u.a.}\approx 4{,}15\,u.a.$$

Question 3 (6 points)

$\boxed{f_m(x)=\ln\left|e^x-m\right| \quad (m\in\mathbb{R}^*)}$

1°) Domaine de définition

Si $m<0$, alors $\text{Dom}\, f_m=\mathbb{R}$

Si $m>0$, alors $\text{Dom}\, f_m=\mathbb{R}\setminus\{\ln m\}$

2°) Limites et asymptotes

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\underbrace{\boxed{e^x}}_{\to 0}-m\right|=\ln|m|$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\underbrace{\boxed{e^x}}_{\to +\infty}-m\right|=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|e^x-m\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|e^x\left(1-me^{-x}\right)\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x+\ln\left|1-me^{-x}\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\overbrace{\boxed{\ln\left|1-\overbrace{\boxed{me^{-x}}}^{\to 0}\right|}}^{\to 0}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_m(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\ln\left|1-\underbrace{\boxed{me^{-x}}}_{\to 0}\right|}}_{\to 0}=0$$

C_{f_m} admet une $AHG\equiv y=\ln|m|$ et une $AOD\equiv y=x$.

$$\forall m\in\mathbb{R}_+^* :\ \lim_{x\to\ln m} f_m(x)=\lim_{x\to\ln m}\ln\underbrace{\boxed{\left|\underbrace{\boxed{e^x}}_{\to m}-m\right|}}_{\to 0}=-\infty$$

C_{f_m} admet une $AV\equiv x=\ln m$ si $m\in\mathbb{R}_+^*$.

3°) Dérivée première et variations

3.1°) $m<0$

$\text{Dom}\, f_m=\text{Dom}\, f_m'=\mathbb{R}$

$f_m'(x)=\frac{e^x}{e^x-m}>0$

Tableau des variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$\ln\|m\|$	$\nearrow$	$+\infty$

3.2°) $m>0$

$\text{Dom}\, f_m=\text{Dom}\, f_m'=\mathbb{R}\setminus\{\ln m\}$

$f_m'(x)=\frac{e^x}{e^x-m}\neq 0$; $f_m'(x)>0\Leftrightarrow e^x>m\Leftrightarrow x>\ln m$

Tableau des variations

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f_m(x)$	$\ln m$	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 4 (6 points)

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{-x^2-3x+4}{x^2+9}=\frac{-\left(x^2+9\right)-3x+13}{x^2+9}=-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+9}+\frac{13}{x^2+9}=-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+9}+\frac{13}{3}\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}$$

$$\int\frac{-x^2-3x+4}{x^2+9}dx=\int\left(-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+9}+\frac{13}{3}\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\right)dx$$

$$=-x-\tfrac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{x}{3}+c\ \ \left(c\in\mathbb{R}\right)$$

<u>$C_f\cap(Ox)$</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+9}=0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=1$

<u>Tableau des signes</u>

x	$-\infty$		-4		-3		1		3		$+\infty$
$\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+9}$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	

$$\text{Aire }=\int_{-3}^{1}\frac{-x^2-3x+4}{x^2+9}dx-\int_{1}^{3}\frac{-x^2-3x+4}{x^2+9}dx$$

$$=\left[-x-\tfrac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{x}{3}\right]_{-3}^{1}-\left[-x-\tfrac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{x}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$=-1-\tfrac{3}{2}\ln\left(1^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{1}{3}-\left(-(-3)-\tfrac{3}{2}\ln\left((-3)^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{-3}{3}\right)$$

$$-\left(-3-\tfrac{3}{2}\ln\left(3^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{3}{3}\right)+\left(-1-\tfrac{3}{2}\ln\left(1^2+9\right)+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{1}{3}\right)$$

$$=-1-\tfrac{3}{2}\ln10+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{1}{3}\cancel{-3}+\tfrac{3}{2}\ln18\cancel{+\tfrac{13}{3}\cdot\tfrac{\pi}{4}}\cancel{+3}+\tfrac{3}{2}\ln18\cancel{-\tfrac{13}{3}\cdot\tfrac{\pi}{4}}-1-\tfrac{3}{2}\ln10+\tfrac{13}{3}\arctan\tfrac{1}{3}$$

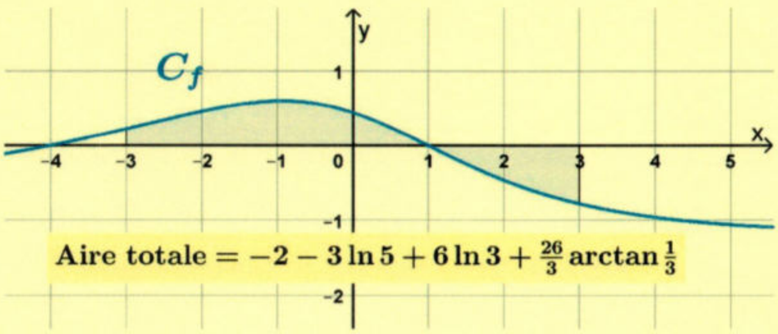
$$=-2-3\ln10+3\ln18+\tfrac{26}{3}\arctan\tfrac{1}{3}$$

$$=-2-3\ln\tfrac{5}{9}+\tfrac{26}{3}\arctan\tfrac{1}{3}$$

$$=-2-3\ln5+6\ln3+\tfrac{26}{3}\arctan\tfrac{1}{3}$$

$$\approx 2{,}55 \text{ u.a.}$$

<u>Figure pas demandée</u>



Question 5 (4 + 4 = 8 points)

a) $\int(1+\cos x)^4(1-\cos x)^3\,dx$

$= \int(1-\cos^2 x)^3(1+\cos x)dx$

$= \int(\sin^2 x)^3(1+\cos x)dx$

$= \int\sin^6 x(1+\cos x)dx$

$= \int\sin^6 x dx + \int\cos x\sin^6 x dx$

$= \int\left(-\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x-\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}\right)dx+\frac{1}{7}\sin^7 x$

$= -\frac{1}{192}\sin 6x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{5}{16}x+\frac{1}{7}\sin^7 x+c \quad (c\in\mathbb{R})$

Linéaristion de $\sin^6 x$

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6\\ &= -\frac{1}{64}\left(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32}\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}+\frac{3}{16}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}-\frac{15}{32}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{5}{16}\\ &= -\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x-\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}\end{aligned}$$

b) Posons : $F(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ sur $]0;1[$.

$1^{ère}$ méthode

Changement de variable : $x=\sin t$

$t=\sin^{-1}x$; $dx=\cos t dt$; $0<x<1 \Leftrightarrow 0<t<\frac{\pi}{2}$

$$F(x)=\int\frac{\cos t dt}{\sin t\underbrace{\boxed{\sqrt{1-\sin^2 t}}}_{\cos t \text{ car } 0<t<\frac{\pi}{2}}}=\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}dt=\int\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt-\int\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}dt$$

$$=\ln\left|\sin\tfrac{t}{2}\right|-\ln\left|\cos\tfrac{t}{2}\right|+c=\ln\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}+c=\ln\left(\tan\tfrac{t}{2}\right)+c=\ln\left(\tan\left(\tfrac{1}{2}\sin^{-1}x\right)\right)+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\ln\left(\tan\left(\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\tfrac{1}{2}\right)\right)-\ln\left(\tan\left(\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\tfrac{1}{4}\right)\right)\approx 0{,}746$$

$2^{iemè}$ méthode

Changement de variable : $x=\sqrt{1-t^2}$

$t=\sqrt{1-x^2}$; $dx=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$; $0<x<1 \Leftrightarrow 0<t<1$

$$F(x)=\int\frac{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt}{\sqrt{1-t^2}\cdot t}=-\int\frac{dt}{1-t^2}=-\int\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t}{(1-t)(1+t)}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t}dt$$

$$=-\tfrac{1}{2}\ln|1+t|+\tfrac{1}{2}\ln|1-t|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\tfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\tfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1-\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{1-\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left[\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(31+8\sqrt{15}\right)\right]\approx 0{,}746$$

Question 6 (2 + 3 + 5 = 10 points)

a) C.E.

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Dom $f = \mathbb{R}$

$f(0) = (0^2 - 0)e^0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\boxed{x^2}}_{\to 0}\underbrace{\boxed{\ln(e^x-1)}}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{\ln(e^x-1)}}^{\to -\infty}}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{\to +\infty}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{x^3e^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{2-2e^x}}_{\to 0}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{(3x^2+x^3)e^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{-2e^x}}_{\to -2}} = 0$$

Conclusion : $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-1)e^x = -1 = f_g\,'(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{\ln(e^x-1)}}^{\to -\infty}}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{x^2e^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{1-e^x}}_{\to 0}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{(2x+x^2)e^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{-e^x}}_{\to -1}} = 0 = f_d\,'(0)$$

Conclusion : $f_g\,'(0) \neq f_d\,'(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0 et l'origine est un point anguleux de C_f.

OU C_f admet deux demi-tangentes à pentes distinctes à l'origine, donc O est un point anguleux de C_f.

c) $\forall x \in]-\infty;0]$: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow (x^2 - x)e^x \geq (2x^2 + x)e^x \Leftrightarrow -x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$

Tableau des signes :

x	$-\infty$		-2		0
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0

$A = \int_{-2}^{0} (-x^2 - 2x)e^x dx$

Première intégration par parties

$u_1(x) = -x^2 - 2x$	$v_1(x) = e^x$
$u_1\,'(x) = -2x - 2$	$v_1\,'(x) = e^x$

$\int (-x^2 - 2x)e^x dx = (-x^2 - 2x)e^x - \int (-2x-2)e^x dx = (-x^2 - 2x)e^x + 2\int (x+1)e^x dx$

Deuxième intégration par parties

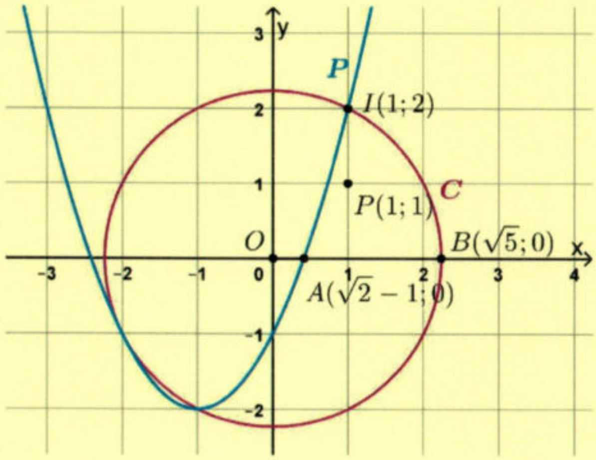
$u_2(x) = x + 1$	$v_2(x) = e^x$
$u_2\,'(x) = 1$	$v_2\,'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}\int (-x^2 - 2x)e^x dx &= (-x^2 - 2x)e^x + 2(x+1)e^x - \int e^x dx \\ &= (-x^2 - 2x + 2x + 1)e^x - e^x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &= -x^2e^x + c\end{aligned}$$

$A = \left[-x^2e^x\right]_{-2}^{0} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$

Question 7 (10 points)

D'après la figure, il semble que le seul point d'intersection de C et de P dans le 1[er] quadrant est $I(1;2)$.



Contrôle :

$1^2+2^2=5$ et $1^2+2\cdot 1-1=2$

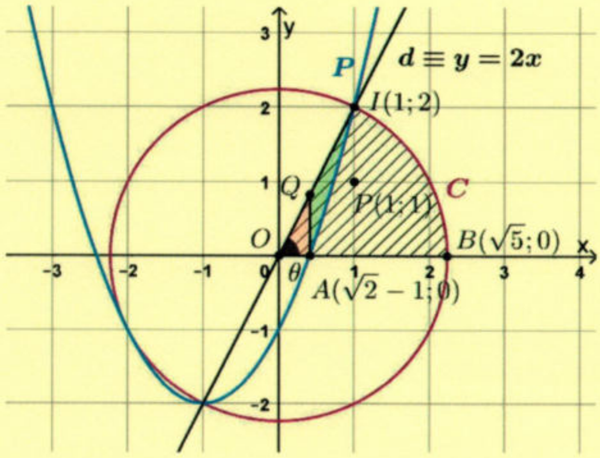
$P\cap(Ox)$

$x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=x_A=-1+\sqrt{2} \vee x=-1-\sqrt{2}$

$\left[\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-1)=8\ ;\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\right]$

$A\left(\sqrt{2}-1;0\right)$

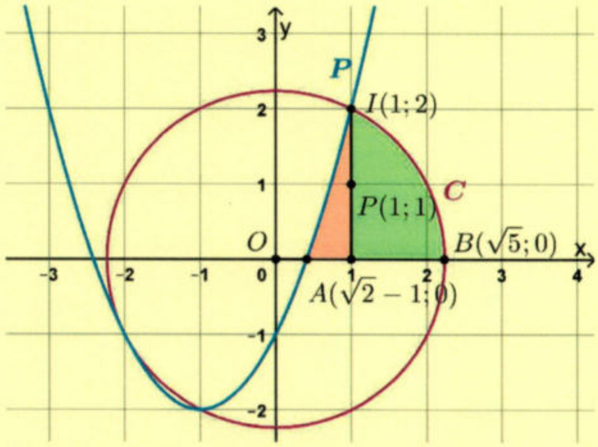
1[ère] méthode



$\theta=\tan^{-1}\widehat{BOI}=\tan^{-1}2$

$$\begin{aligned}
Aire &= aire\left(\text{secteur circulaire } \widehat{OBI}\right)-[OAQ]-\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\left(2x-\left(x^2+2x-1\right)\right)dx\\
&=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot\tan^{-1}2}{2}-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-2\right)}{2}-\left[-\tfrac{1}{3}x^3+x\right]_{\sqrt{2}-1}^{1}\\
&=\tfrac{5}{2}\tan^{-1}2-\left(3-2\sqrt{2}\right)-\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}-\tfrac{2}{3}\right)\\
&=\tfrac{5}{2}\tan^{-1}2+\tfrac{4\sqrt{2}-7}{3}\\
&\approx 2{,}32 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

<u>2^e méthode</u>



$$Aire = \underbrace{\boxed{\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\left(x^2+2x-1\right)dx}}_{A_1} + \underbrace{\boxed{\int_{1}^{\sqrt{5}}\sqrt{5-x^2}\,dx}}_{A_2}$$

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_{\sqrt{2}-1}^{1} = \tfrac{1}{3}-\left(\tfrac{5-4\sqrt{2}}{3}\right) = \tfrac{4\sqrt{2}-4}{3} \text{ u.a.}$$

$$A_2 = \int_1^{\sqrt{5}}\sqrt{5-x^2}\,dx = \sqrt{5}\int_1^{\sqrt{5}}\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx$$

<u>Changement de variable</u> :

$\frac{x}{\sqrt{5}} = \sin t \Leftrightarrow x = \sqrt{5}\sin t$; donc : $dx = \sqrt{5}\cos t\,dt$

$1 \le x \le \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} \le \sin t \le 1 \Leftrightarrow \underbrace{\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5}}_{a} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{5}}\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx &= \sqrt{5}\int_a^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\sqrt{5}\cos t\,dt \\
&= 5\int_a^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos t|}_{\cos t \text{ car } t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \cos t\,dt \\
&= \tfrac{5}{2}\int_a^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos t\right)dt \\
&= \tfrac{5}{2}\left[t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_a^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \tfrac{5\pi}{4}+0-\tfrac{5}{2}a-\tfrac{5}{4}\sin(2a) \\
&= \tfrac{5\pi}{4}+0-\tfrac{5}{2}a-\tfrac{5}{4}\cdot 2\sin a\cos a \\
&= \tfrac{5\pi}{4}-\tfrac{5}{2}\sin^{-1}\tfrac{\sqrt{5}}{5}-\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{1-\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\
&= \tfrac{5\pi}{4}-\tfrac{5}{2}\sin^{-1}\tfrac{\sqrt{5}}{5}-1
\end{aligned}$$

Ainsi : $Aire = A_1 + A_2 = \boxed{\frac{5\pi}{4}-\frac{5}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4\sqrt{2}-7}{3}} \approx 2{,}32$ u.a.