LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**B**	*Durée de l'épreuve : 240 minutes* *Date de l'épreuve : 17/05/2021*

Question 1 *((5 + 2,5 + 4 + 3 + 2) + 2,5 + 3 = 22 points)*

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}}-e & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1° Étude de *f*

a) Déterminer le domaine de définition de *f*. Étudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0. Préciser les domaines de continuité et de dérivabilité de *f*.

b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de *f*.

c) Étudier les variations de *f* et dresser le tableau des variations. Indiquer les coordonnées d'éventuels points où les extrema sont atteints.

d) Étudier la concavité de *f* et dresser le tableau de concavité. Indiquer les coordonnées d'éventuels points d'inflexion.

e) Représenter *f* dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2° Calcul d'une aire

Calculer l'aire de la surface délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.

3° Nombre de solutions d'une équation

Soit l'équation $\left(E_m\right)$: $e^{\frac{3x^2-2m}{2x^2}}=x$, avec $x>0$ et *m* un paramètre réel.

Trouver le nombre de solutions de $\left(E_m\right)$ suivant les valeurs de *m*.

(Suggestion : Exprimer *m* en fonction de *x* et utiliser la partie 1°.)

Question 2 *(3 + 1 + 2 = 6 points)*

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique à droite.
b) Déterminer la position de C_f par rapport à cette asymptote.
c) Étudier le nombre de tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y=2x$.

Question 3 *(2,5 + 4 + 4,5 = 11 points)*

1° Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{3x+1}$

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$: $27^{x+\frac{2}{3}}+3^{x+1}\geq 9^{x+\frac{3}{2}}+3^{2x}$

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{\left(\log_{\sqrt{3}}\left(\log_{x^2}64\right)-2\right)\cdot\left(2^{3x}-3^{2x-1}\right)}{\sqrt{e^{x^2+8}}-e^{3x}}=0$

Question 4 *(2,5 + 5,5 = 8 points)*

Soit *C* le cercle de centre $I(2;2)$ et de rayon 2 et soit *P* la parabole d'équation $y = 2 - \sqrt{3}x^2$.

a) Faire une figure et déterminer algébriquement les points d'intersection de *C* et de *P* dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

b) Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface du plan délimitée par le cercle *C*, la parabole *P* et la droite d'équation $x = 1$.

Question 5 *((2 + 3) + (1 + 3) + 4 = 13 points)*

1° Soit *f* la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{7x^2 + x + 8}{4x^3 + 8x^2 + x + 2}$.

a) Trouver les réels *a*, *b* et *c* tels que $(\forall x \in]-2;+\infty[) : f(x) = \dfrac{ax+b}{4x^2+1} + \dfrac{c}{x+2}$.

b) Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 3e^{-3x}}{e^{3x} + 3e^{-3x}}$.

a) Trouver la racine x_0 de *f*.

b) Trouver la primitive *F* de *f* telle que $F\left(\dfrac{\ln 3}{6}\right) = \dfrac{\ln 3}{6}$.

3° Calculer $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos(3x)dx$.

Examen de fin d’études secondaires — Sections B, C, D

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$