# Epreuve écrite

**Examen de fin d'études secondaires 2010**

**Section: C / D**

**Branche: Mathématiques II**

**Numéro d'ordre du candidat**

______________________________

## Question 1 (3 points)

$a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs distincts de 1.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ .

En déduire que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ .

## Question 2 (9 points : 6 + 3)

(a) Résoudre l'inéquation $2\ln(3-x) - \ln(x-1) \geqslant 2\ln 3 - \ln(2x-1)$

(b) Résoudre l'équation $12e^{-3x} + 1 = e^{3x}$

## Question 3 (19 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = 2\ln^2 x - 4\ln x$ .

(a) Étudier la fonction $f$ : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ; limites aux bornes du domaine et asymptotes ; extréma ; points d'inflexion ; tableau de variation avec indication de la concavité ; points d'intersection avec l'axe des abscisses ; représentation graphique (repère orthonormé, unité 1 cm)

(b) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = 2x(2-\ln x)^2$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_0^+$ .

(c) Trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe $Ox$ et le graphique de $f$ .

## Question 4 (5 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^{\sqrt{x}}$ .

(a) Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction $f$ .

(b) Trouver $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ .

## Question 5 (9 points : 3 + 6)

(a) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2x}{\left(3 - 2\cos^2 x\right)^2}\, dx$ .

(b) On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_0$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^3 + x}$ .

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_0 \quad f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}$ .

Trouver sur un intervalle $I$ à préciser l'expression de la primitive $F$ de $f$ qui prend la valeur $\dfrac{\pi}{2}$ en $-1$ .

# Epreuve écrite

**Examen de fin d'études secondaires 2010**

**Section: C / D**

**Branche: Mathématiques II**

**Numéro d'ordre du candidat**

______________________

**Question 1 (3 points)**

$a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs distincts de 1.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ .

En déduire que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ .

**Question 2 (9 points : 6 + 3)**

(a) Résoudre l'inéquation $2\ln(3-x) - \ln(x-1) \geqslant 2\ln 3 - \ln(2x-1)$

(b) Résoudre l'équation $12e^{-3x} + 1 = e^{3x}$

**Question 3 (19 points)**

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = 2\ln^2 x - 4\ln x$ .

(a) Étudier la fonction $f$ : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ; limites aux bornes du domaine et asymptotes ; extréma ; points d'inflexion ; tableau de variation avec indication de la concavité ; points d'intersection avec l'axe des abscisses ; représentation graphique (repère orthonormé, unité 1 cm)

(b) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to F(x) = 2x(2-\ln x)^2$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_0^+$ .

(c) Trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe $Ox$ et le graphique de $f$ .

**Question 4 (5 points)**

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^{\sqrt{x}}$ .

(a) Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction $f$ .

(b) Trouver $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ .

**Question 5 (9 points : 3 + 6)**

(a) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(3-2\cos^2 x)^2}\,dx$ .

(b) On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_0$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^3 + x}$ .

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_0 \quad f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}$ .

Trouver sur un intervalle $I$ à préciser l'expression de la primitive $F$ de $f$ qui prend la valeur $\dfrac{\pi}{2}$ en $-1$ .