

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010

Section: C / D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question 1 (3 points)

a et b sont deux réels strictement positifs distincts de 1.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

En déduire que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Question 2 (9 points : 6 + 3)

(a) Résoudre l'inéquation $2 \ln(3-x) - \ln(x-1) \geq 2 \ln 3 - \ln(2x-1)$

(b) Résoudre l'équation $12e^{-3x} + 1 = e^{3x}$

Question 3 (19 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = 2 \ln^2 x - 4 \ln x$.

(a) Étudier la fonction f : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ; limites aux bornes du domaine et asymptotes ; extréma ; points d'inflexion ; tableau de variation avec indication de la concavité ; points d'intersection avec l'axe des abscisses ; représentation graphique (repère orthonormé, unité 1 cm)

(b) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = 2x(2 - \ln x)^2$ est une primitive de f sur \mathbb{R}_0^+ .

(c) Trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe Ox et le graphique de f .

Question 4 (5 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

(a) Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction f .

(b) Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Question 5 (9 points : 3 + 6)

(a) Calculer $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(3 - 2 \cos^2 x)^2} dx$.

(b) On donne la fonction f définie sur \mathbb{R}_0 par $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + x}$.

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_0 \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

Trouver sur un intervalle I à préciser l'expression de la primitive F de f qui prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ en -1 .

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010

Section: C / D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question 1 (3 points)

a et b sont deux réels strictement positifs distincts de 1.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

En déduire que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Question 2 (9 points : 6 + 3)

(a) Résoudre l'inéquation $2 \ln(3-x) - \ln(x-1) \geq 2 \ln 3 - \ln(2x-1)$

(b) Résoudre l'équation $12e^{-3x} + 1 = e^{3x}$

Question 3 (19 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = 2 \ln^2 x - 4 \ln x$.

(a) Étudier la fonction f : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ; limites aux bornes du domaine et asymptotes ; extréma ; points d'inflexion ; tableau de variation avec indication de la concavité ; points d'intersection avec l'axe des abscisses ; représentation graphique (repère orthonormé, unité 1 cm)

(b) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow F(x) = 2x(2 - \ln x)^2$ est une primitive de f sur \mathbb{R}_0^+ .

(c) Trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe Ox et le graphique de f .

Question 4 (5 points)

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

(a) Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction f .

(b) Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Question 5 (9 points : 3 + 6)

(a) Calculer $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(3 - 2 \cos^2 x)^2} dx$.

(b) On donne la fonction f définie sur \mathbb{R}_0 par $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + x}$.

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_0 \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$.

Trouver sur un intervalle I à préciser l'expression de la primitive F de f qui prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ en -1 .

Examen de fin d'études secondaires 2010

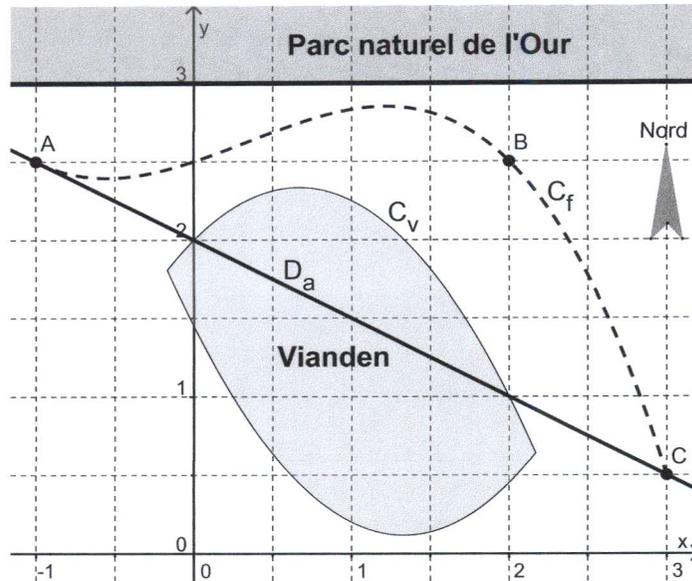
Section : C, D

Branche : Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Contournement

La ville de Vianden est actuellement traversée par la route nationale toute droite décrite par la droite D_a dans le graphique ci-dessous. Un contournement décrit par la courbe C_f est planifié.



Les données indiquées sur le graphique sont exprimées en km.

- Déterminer à l'aide du graphique l'expression de la fonction affine a qui représente l'ancienne route traversant Vianden.
- Le contournement indiqué par la courbe C_f doit passer par les points A , B et C . Au point A le contournement doit avoir la même direction que l'ancienne route. Au point C la nouvelle route peut rejoindre l'ancienne route sous un angle quelconque. La fonction f est une fonction polynôme du troisième degré. Exprimer les différentes conditions et donner l'expression de $f(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3]$ (dans la suite on prend : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$).
- Donner le point d'inflexion de la courbe C_f et une équation cartésienne de la tangente t en ce point.
- Au Nord de Vianden se trouve le parc naturel de l'Our dont le bord du sud est donné par la droite $d \equiv y = 3$. Le Ministère de l'environnement exige que la route respecte une distance minimale de 100 m du parc naturel. Est-ce le cas ? Quelle est la distance minimale d_m entre la nouvelle route et le parc naturel ?
- La zone située entre l'ancienne route et la nouvelle route, et bien sûr située à l'extérieur de la ville de Vianden, est aménagée comme zone artisanale. Donner l'aire \mathcal{A} de cette zone, sachant que le bord de la partie nord de la ville de Vianden est donné par l'expression : $v(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x + 2$.

Le terrain de la zone artisanale est mis en vente au prix de 15 €/m^2 .

Quel est le prix de vente total P de ce terrain ?

_____ 15 points