I. 1) Voir livre p. 55

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \text{Arcsin}\, x}{\sin^2 x} = \dfrac{0}{0}$ f.i.

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sin x \cos x} = \dfrac{0}{0}$ f.i.

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'}{(\sin 2x)'}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)}{2\cos 2x}$

$= \dfrac{0}{2}$

$= 0$

3) a) $2\ln 3 - \ln(3-x) = \ln x - 2\ln(x-1)$

Cond : $\begin{cases} 3-x>0 \\ x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<3 \\ x>0 \\ x>1 \end{cases} \iff \underline{\underline{1<x<3}}$

$\iff x\in\,]1;3[$ et $\ln 9 + \ln(x-1)^2 = \ln x + \ln(3-x)$

$\iff$ " " $\ln[9(x^2-2x+1)] = \ln[x(3-x)]$

$\iff$ " " $9x^2-18x+9 = 3x-x^2$ (ln = bij.)

$\iff$ " " $\underline{10x^2-21x+9=0}$, $\Delta = 441-360 = 81$

$\iff$ " " $x = \dfrac{21\pm 9}{20} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{5} \text{ à rejeter} \end{cases}$

$\iff x = \dfrac{3}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $\dfrac{2e^x+1}{e^x-1} \leq e^x+3$ (C.E. : $x\neq 0$)

$\iff \dfrac{2e^x+1-(e^x+3)(e^x-1)}{e^x-1} \leq 0$

$\iff \dfrac{\cancel{2e^x}+1-e^{2x}-\cancel{2e^x}+3}{e^x-1} \leq 0$

$\iff \dfrac{(2+e^x)(2-e^x)}{e^x-1} \leq 0$

$\iff \dfrac{2-e^x}{e^x-1} \leq 0$ (car $2+e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$)

$\iff t=e^x$ et $\dfrac{2-t}{t-1} \leq 0$

t		1		2	
$\frac{2-t}{t-1}$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$\iff e^x < 1$ ou $e^x \geq 2$

$\iff x<0$ ou $x \geq \ln 2$

$S = \,]-\infty,0[\,\cup\,[\ln 2,+\infty[$

II.

1) $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x}$

* $\mathrm{dom} f =]0\,;+\infty[= \mathrm{dom}_c f$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\ln x}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ f.i.

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{1}$

$= 0 \Rightarrow$ AH d'éq. $y=0$ à droite

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left[(1+2\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right] = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty \Rightarrow$ AV d'éq. $x=0$.

* $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $f'(x) = \dfrac{x\cdot\frac{2}{x} - (1+2\ln x)\cdot 1}{x^2}$

$= \dfrac{2-1-2\ln x}{x^2}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}65$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$f(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1+2\cdot\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \simeq 1{,}21$ est un max $\begin{cases}\text{local}\\ \text{absolu}\end{cases}$

* $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $f''(x) = \dfrac{x^2\left(-\frac{2}{x}\right) - (1-2\ln x)\cdot 2x}{x^4}$

$= \dfrac{-2-2+4\ln x}{x^3}$

$$\boxed{f''(x) = \dfrac{4(\ln x - 1)}{x^3}}$$ $x^3 > 0$ sur dom f

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$\cap$	0	$(+)$	

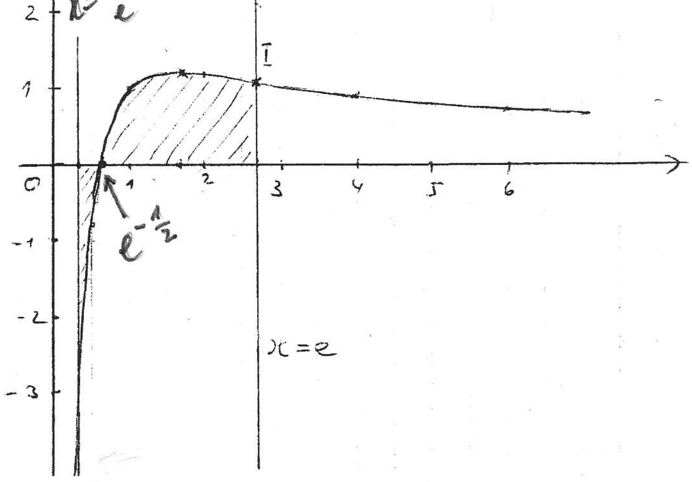
$f(e) = \frac{3}{e} \simeq 1{,}10$

$I(e\,;\frac{3}{e})$ est un pt d'inflexion.

* $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}61}}$

*

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6
$f(x)$	$-0{,}77$	1	$1{,}19$	$0{,}94$	$0{,}76$



2) $A = \int_{e^{-1}}^{e^{-\frac{1}{2}}} -f(x)\,dx + \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^{e} f(x)\,dx$

Soit $F(x) = \int (1+2\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$ une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

$= \frac{1}{2}\int \underbrace{(1+2\ln x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{\frac{2}{x}}_{u'(x)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{[u(x)]^2}{2}$

$= \frac{1}{4}(1+2\ln x)^2$

Alors : $A = -\frac{1}{4}\left[(1+2\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{e^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\left[(1+2\ln x)^2\right]_{e^{-\frac{1}{2}}}^{e}$

$= -\frac{1}{4}(0-1) + \frac{1}{4}(9-0)$

$= \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$

$\boxed{A = \frac{5}{2}\ u.a.}$

3) $g(x) = \dfrac{1+\ln(x^2)}{x}$

$\text{dom}\,g = \mathbb{R}_0$

$\forall x \in \mathbb{R}_0,\ g(x) = \dfrac{1+\ln(-x)^2}{-x} = -\dfrac{1+\ln(x^2)}{x} = -g(x)$

Donc : g est impaire

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ g(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x} = f(x)$

Donc : G_g comprend G_f et le symétrique de G_f par rapport à l'origine.

III. 1) $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x}{\sqrt{3-2x}}\,dx$

Par substitution : posons $t = 3-2x \Leftrightarrow x = \dfrac{3-t}{2}$;

alors : $\dfrac{dt}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}\,dt$

x	-1	1
$t = 3-2x$	5	1

$I = \int_{5}^{1} \dfrac{3-t}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\int_{1}^{5} \left(3t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$= \left[\frac{3}{4}\,2\sqrt{t} - \frac{1}{4}\cdot\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5$

$= \left[\frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{1}{6}\,t\sqrt{t}\right]_1^5 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\cdot 5\sqrt{5}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}}$

$\simeq 0{,}16$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2-2)\sin 2x \, dx$$

Double ipp :

Posons : $\begin{cases} u_1(x) = x^2-2 & \Rightarrow u_1'(x) = 2x \\ v_1'(x) = \sin 2x & \Rightarrow v_1(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

$$J = \left[\frac{2-x^2}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x \, dx$$

$$= 0 - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x \, dx$$

Posons : $\begin{cases} u(x) = x & \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos 2x & \Rightarrow v(x) = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$

$$J = -1 + \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx$$

$$= -1 + \left(\frac{\pi}{8} - 0\right) + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -1 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}(0-1)$$

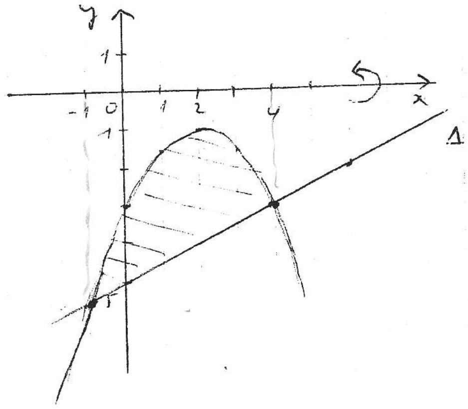
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{5}{4}$$

$$\boxed{J = \frac{\pi - 10}{8}}$$

2) $\mathcal{P} \equiv y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$ (sommet $S(2;-1)$, axe $x=2$)

$\Delta \equiv x - 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{x}{2} - 5}$

Croquis :



Abscisses des pts d'intersection des deux courbes :

$$\frac{x}{2} - 5 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0 \quad |.2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad (\Delta = 25)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$V = \pi \int_{-1}^{4} \left[(y_{ext})^2 - (y_{int})^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{4} \left[\left(\frac{x}{2} - 5\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{4} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{27}{4}x^2 + 7x + 16\right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 16x\right]_{-1}^{4}$$

$$\boxed{V = \frac{125\pi}{2}}$$

4e question

1ère partie

a) Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a<0$

On détermine a, b et c en résolvant p.r. à (a,b,c) le système d'équations

$$\begin{cases} f(0,5)=3,1 \\ f(4,5)=3,8 \\ f(8,5)=3,1 \end{cases}$$

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6▾
    Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

■ NewProb                                   Done
■ a·x² + b·x + c → f(x)                     Done
■ solve(f(.5) = 3.1 and f(4.5) = 3.8 and f(▸
  a = -.04375 and b = .39375 and c = 2.914(▸
■ f(x) | a = -.043750000000006 and b = .393▸
          -.04375·x² + .39375·x + 2.9140625
MAIN          RAD AUTO          FUNC 4/30
```

On trouve $f(x)\approx -0,04375x^2+0,39375x+2,91406$ $\left(= -\frac{7}{160}x^2+\frac{63}{160}x+\frac{373}{128}\right)$

b) Calculons d'abord la quantité de verre nécessaire à la fabrication du corps proprement dit :

$V_{corps} = V_f - V_g$

V_f est le volume du corps de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox la partie du plan comprise entre C_f, l'axe Ox et les droites $x=0$ et $x=8,5$

$V_f = \pi\int_0^{8,5} f(x)^2\,dx \simeq 335,036\ cm^3$

Définition analogue pour V_g ; la droite $x=0$ sera toutefois remplacée par la droite $x=0,4$:

$V_g = \pi\int_{0,4}^{8,5} g(x)^2\,dx \simeq 274,330\ cm^3$

D'où $V_{corps} \simeq 60,707\ cm^3$

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6▾
    Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ π·∫(0,8.5)((f(x))²)dx              335.036329452
■ -13/320·x² + 129/320·x + 3211/1280 → g(x)   Done
■ π·∫(.4,8.5)((g(x))²)dx             274.329684291
■ π·∫(0,0.5)((f(x))²)dx - π·∫(.4,0.5)((g(x))²)dx
                                     60.7066451611
MAIN          RAD AUTO          FUNC 8/30
```

$V_{autre} = V_{corps}$

Ainsi la quantité de verre nécessaire à la fabrication d'un verre sera :

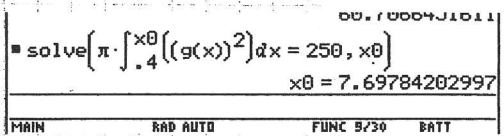
$$V = 2 \cdot V_{corps} \simeq 121{,}413 \text{ cm}^3$$

c) $250 \text{ ml} = 250 \text{ cm}^3$ $\quad (1 \ell = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3)$

Soit x_0 l'abscisse de la marque $(x_0 > 0{,}4)$

x_0 doit vérifier la condition :

$$\pi \int_{0,4}^{x_0} g(x)^2 \, dx = 250$$



Il suffit donc de résoudre cette équation p. r. à x :

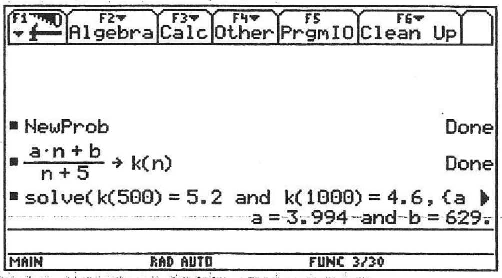
$$x_0 \simeq 7{,}7 \text{ (cm)}$$

(La marque qui indique les 250 ml doit être apportée à environ $8{,}5 - 7{,}7 = 0{,}8$ cm $= 8$ mm du bord supérieur du verre.)

2e partie

a) Pour déterminer a et b il suffit de résoudre p.r.à (a,b) le système d'équations

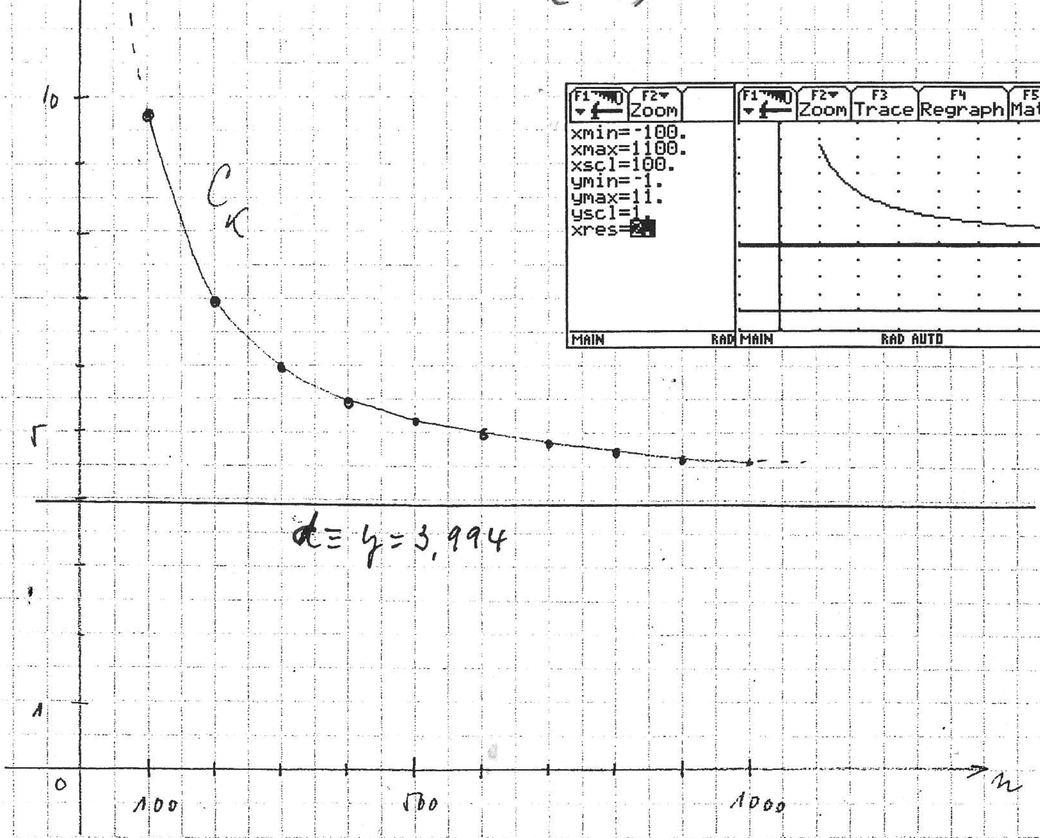
$$\begin{cases} K(500) = 5,2 \\ K(1000) = 4,6 \end{cases}$$



On trouve : $K(n) = \dfrac{3,994\,n + 629}{n+5}$

(ou encore : $K(n) = \dfrac{1997n + 314500}{500(n+5)}$)

b)



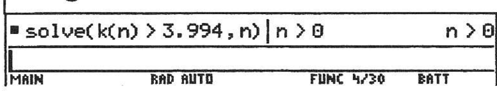
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} K(n) = 3,994$

La droite $d \equiv y = 3,994$ est une AH.

C_K est au-dessus de d

c.à.d. $K(n) > 3,994 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Justification non nécessairement exigée !



Le prix de fabrication par verre ne pourra donc jamais descendre au-dessous de 3,994 €