EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **CORRIGÉ**							
Date :	05.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:00		*Durée :*	105 minutes
Discipline :	MATHE - STRUC	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG / CE-MATF		
					Numéro du candidat :		

Question 1 16 points (4+3+5+4)

$$\begin{cases} mx + 2my + 3z = 3 \\ 3x + 2my + z = 0 \\ 2x + (m-2)y + z = 1 \end{cases}$$

1) $\Delta = \begin{vmatrix} m & 2m & 3 \\ 3 & 2m & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} m & 2m \\ 3 & 2m \\ 2 & m-2 \end{matrix}$

$= 2m^2 + 4m + 9(m-2) - 12m - m(m-2) - 6m$

$= 2m^2 + 4m + 9m - 18 - 12m - m^2 + 2m - 6m$

$= m^2 - 3m - 18$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \Leftrightarrow (m-6)(m+3) = 0 \Leftrightarrow m = 6 \ ou \ m = -3$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R}\backslash\{-3;6\}$. **(4p)**

2) $m = -3$

$$\begin{cases} -3x - 6y + 3z = 3 & (1) \\ 3x - 6y + z = 0 & (2) \\ 2x - 5y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2): -12y + 4z = 3 \ (4)$

$2 \cdot (1) + 3 \cdot (3): -27y + 9z = 9 \Leftrightarrow -3y + z = 1 \ (5)$

$$\begin{cases} -12y + 4z = 3 & (4) \\ -3y + z = 1 & (5) \end{cases}$$

$(4) - 4 \cdot (5): \ 0 = -1 \ (6)$

Le système est impossible. $S = \emptyset$

<u>Interprétation géométrique :</u> Le système est formé d'équations cartésiennes de trois plans de l'espace n'ayant aucun point en commun. **(3p)**

3) $m = 6$
$$\begin{cases} 6x + 12y + 3z = 3 & (1) \\ 3x + 12y + z = 0 & (2) \\ 2x + 4y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1) - 2 \cdot (2):\ -12y + z = 3\ (4)$

$(1) - 3 \cdot (3): 0 = 0\ (5)$

Le système est simplement indéterminé.

En posant $y = \alpha\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$

$(4): z = 3 + 12\alpha$

$y = \alpha$ et $z = 3 + 12\alpha$ dans (3): $2x + 4\alpha + 3 + 12\alpha = 1 \Leftrightarrow 2x = -2 - 16\alpha \Leftrightarrow x = -1 - 8\alpha$

$S = \{(-1 - 8\alpha; \alpha; 3 + 12\alpha) /\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

<u>Interprétation géométrique :</u> Le système est formé d'équations cartésiennes de trois plans de l'espace se coupant suivant la droite d passant par le point $A\ (-1;0;\ 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$. **(5p)**

4) $m = -4$
$$\begin{cases} -4x - 8y + 3z = 3 & (1) \\ 3x - 8y + z = 0 & (2) \\ 2x - 6y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1) + 2 \cdot (3):\ -20y + 5z = 5 \Leftrightarrow -4y + z = 1\ (4)$

$3 \cdot (3) - 2 \cdot (2):\ -2y + z = 3\ (5)$

$$\begin{cases} -4y + z = 1 & (4) \\ -2y + z = 3 & (5) \end{cases}$$

$(4) - (5):\ -2y = -2 \Leftrightarrow y = 1$

$y = 1$ dans (4): $-4 + z = 1 \Leftrightarrow z = 5$

$y = 1$ et $z = 5$ dans (3): $2x - 6 + 5 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

$S = \{(1;\ 1;\ 5)\}$

<u>Interprétation géométrique :</u> Le système est formé d'équations cartésiennes de trois plans de l'espace se coupant au point $I\ (1;\ 1;\ 5)$. **(4p)**

Question 2 14 points (2+2+4+4+2)

1) $M(x;y;z) \in (AB) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})$ *tel que* $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3k \\ y-3 = -5k \\ z-1 = 3k \end{cases}$$

Ainsi $(AB) \equiv \begin{cases} x = -2+3k \\ y = 3-5k \\ z = 1+3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ **(2p)**

2) Posons $C\,(x_C; y_C; -8)$. Alors $C \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} -2+3k = x_C & (1) \\ 3-5k = y_C & (2) \\ 1+3k = -8 & (3) \end{cases}$.

(3): $k = -3$

$k = -3$ dans (2): $y_C = 18$

$k = -3$ dans (1): $x_C = -11$ **(2p)**

Ainsi $C\,(-11; 18; -8)$

3) $(AB) \cap \pi$

$$\begin{cases} x = -2+3k & (1) \\ y = 3-5k & (2) \\ z = 1+3k & (3) \\ 2x-3y+z-36 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4): $-4+6k-9+15k+1+3k-36 = 0 \Leftrightarrow 24k = 48 \Leftrightarrow k = 2$

$k = 2$ dans (1), (2) et (3) : $x = 4$ $\qquad y = -7$ $\qquad z = 7$

La droite (AB) perce le plan π au point $I(4; -7; 7)$. **(4p)**

4) La droite d est perpendiculaire au plan π. Un vecteur $\overrightarrow{n_\pi}$ normal au plan π est aussi un vecteur directeur de la droite d.

$\overrightarrow{n_\pi}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})$ *tel que* $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{n_\pi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2k & (1) \\ y+2 = -3k & (2) \\ z-4 = k & (3) \end{cases}$$

(3) dans (1): $x-1 = 2z-8 \Leftrightarrow x-2z+7 = 0$

(3) dans (2): $y+2 = -3z+12 \Leftrightarrow y+3z-10 = 0$

Ainsi $d \equiv \begin{cases} x-2z+7 = 0 \\ y+3z-10 = 0 \end{cases}$. **(4p)**

5) $\pi \equiv 2x-3y+z-36 = 0$

$2x-3y+z-36 = 0 \Leftrightarrow z = -2x+3y+36$

Posons $x = \alpha \;\; (\alpha \in \mathbb{R})$ $\qquad y = \beta \;\; (\beta \in \mathbb{R})$,

alors $z = -2\alpha+3\beta+36$

Ainsi $\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -2\alpha+3\beta+36 \end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan π. **(2p)**

Question 3 17 points (13+4)

1) $P(z) = z^3 + (1-6i)z^2 + (-13-i)z + 2 + 10i$
$z^3 + (1-6i)z^2 + (-13-i)z + 2 + 10i = 0.$

L'équation admet une racine imaginaire pure, il existe donc un réel b tel que $P(bi) = 0$.

$P(bi) = 0$

$\Leftrightarrow b^3i^3 + (1-6i)b^2i^2 + (-13-i)bi + 2 + 10i = 0$

$\Leftrightarrow -b^3i - b^2 + 6ib^2 - 13bi + b + 2 + 10i = 0$

$\Leftrightarrow -b^2 + b + 2 + i\cdot(-b^3 + 6b^2 - 13b + 10) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + b + 2 = 0 & (1) \\ -b^3 + 6b^2 - 13b + 10 = 0 & (2) \end{cases}$ **(3p)**

De (1): $-b^2 + b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ ou $b = 2$

$b = 2$ dans (2): $-8 + 24 - 26 + 10 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Donc $2i$ est la racine cherchée. **(2p)**

Avec le schéma de HORNER

	1	$1-6i$	$-13-i$	$2+10i$
$2i$		$2i$	$8+2i$	$-2-10i$
	1	$1-4i$	$-5+i$	0

Ainsi $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)\left[z^2 + (1-4i)z + (-5+i)\right] = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + (1-4i)z + (-5+i) = 0$ **(3p)**

Cherchons les racines de $z^2 + (1-4i)z + (-5+i) = 0$

$\Delta = (1-4i)^2 - 4(-5+i) = 1 - 8i - 16 + 20 - 4i = 5 - 12i$ **(1p)**

Soit $u = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ.

Alors $(a + bi)^2 = 5 - 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & (3) \\ 2ab = -12 & (4) \\ a^2 + b^2 = 13 & (5) \end{cases}$$

$(5) + (3): 2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$ ou $a = -3$

$(5) - (3): 2b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ ou $b = -2$

De (4) on déduit que a et b sont de signes contraires.

Ainsi $u_1 = -3 + 2i$ et $u_2 = 3 - 2i$ sont les racines carrées complexes de Δ. **(3p)**

Finalement $z_1 = \frac{-1+4i-3+2i}{2} = -2 + 3i$ $z_2 = \frac{-1+4i+3-2i}{2} = 1 + i$

$S = \{2i; -2 + 3i; 1 + i\}$ **(1p)**

2) Posons $u = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Alors $(-2 + 3i)z + (4 - 2i)\bar{z} = -8 - 11i$

$\Leftrightarrow (-2 + 3i)(a + bi) + (4 - 2i)(a - bi) = -8 - 11i$

$\Leftrightarrow -2a - 2bi + 3ai - 3b + 4a - 4bi - 2ai - 2b = -8 - 11i$

$\Leftrightarrow (2a - 5b) + i(a - 6b) = -8 - 11i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b = -8 & (1) \\ a - 6b = -11 & (2) \end{cases}$$

$(2): a = -11 + 6b$

$a = -11 + 6b$ dans $(1): -22 + 12b - 5b = -8 \Leftrightarrow b = 2$

$b = 2$ dans (1): $2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Ainsi $S = \{1 + 2i\}$ **(4p)**

Question 4 13 points [3+(4+6)]

1) $\frac{6i-14}{7i}\cdot\frac{i}{i}+\frac{6-8i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{-6-14i}{-7}+\frac{12+6i-16i+8}{4-i^2}=\frac{6+14i}{7}+\frac{20-10i}{5}=\frac{6}{7}+2i+4-2i=\frac{34}{7}\in\mathbb{R}$ **(3p)**

2)

a. $z_1=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ $\qquad |z_1|=\sqrt{8+8}=4$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{3\pi}{4}\ (2^{e}\text{ quadrant})$$

$z_1=4cis\frac{3\pi}{4}$ **(1,5p)**

Les racines quatrièmes complexes de z_1 sont données par

$$u_k=\sqrt[4]{4}cis\left(\frac{3\pi}{16}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad k\in\{0;1;2;3\}$$

$u_0=\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{16}$

$u_1=\sqrt{2}cis\frac{11\pi}{16}$

$u_2=\sqrt{2}cis\frac{19\pi}{16}=\sqrt{2}cis(-\frac{13\pi}{16})$

$u_3=\sqrt{2}cis\frac{27\pi}{16}=\sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{16})$ **(2,5p)**

b. $z_2=\sqrt{3}-i$ $\qquad |z_2|=\sqrt{3+1}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{6}\ (4^{e}\text{ quadrant})$$

$z_2=2cis(-\frac{\pi}{6})$ **(1,5p)**

$Z=\frac{\left(4cis\frac{3\pi}{4}\right)^4}{\left(2cis(-\frac{\pi}{6})\right)^8}=\frac{4^4cis(3\pi)}{2^8cis(-\frac{8\pi}{6})}=cis\left(3\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=cis\frac{13\pi}{3}=cis\frac{\pi}{3}$ **(3,5p)**

$Z=cis\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(1p)**