

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	22.09.23	Durée :	08:15 - 10:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	Section(s) :	CD / CD-4LANG

Question 1

(12 points)

$$P(z) = z^3 + (1 + 2i)z^2 - (1 - 10i)z - 3 \cdot (7 + 4i)$$

Soit bi la racine imaginaire pure de P , avec $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(bi) = 0 &\iff (bi)^3 + (1 + 2i)(bi)^2 - (1 - 10i)bi - 21 - 12i = 0 \\ &\iff -b^3i - b^2 - 2b^2i - bi - 10b - 21 - 12i = 0 \\ &\iff (-b^2 - 10b - 21) + (-b^3 - 2b^2 - b - 12)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} -b^2 - 10b - 21 = 0 & (1) \\ -b^3 - 2b^2 - b - 12 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Réolvons (1) : $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-21) = 100 - 84 = 16$

$$b = \frac{10 \pm 4}{-2} \iff b = -7 \text{ ou } b = -3$$

$b = -3$ est aussi une solution de (2), car $-(-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - (-3) - 12 = 0$.

Par conséquent $z = -3i$ est une racine imaginaire pure de P .

Division par $z + 3i$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 + 2i & -1 + 10i & -21 - 12i \\ -3i & & -3i & -3 - 3i & 21 + 12i \\ \hline & 1 & 1 - i & -4 + 7i & \parallel & 0 \end{array}$$

$$\text{D'où } P(z) = (z + 3i)(z^2 + (1 - i)z - 4 + 7i) = (z + 3i) \cdot Q(z)$$

$$Q(z) = 0 \iff z^2 + (1 - i)z - 4 + 7i = 0$$

$$\Delta = (1 - i)^2 - 4 \cdot (-4 + 7i)$$

$$= 1 - 2i - 1 + 16 - 28i$$

$$= 16 - 30i$$

Soit $x + iy$ une racine carrée complexe de $16 - 30i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = -30 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{16^2 + (-30)^2} = 34 & (3) \end{cases}$$

$$(3) + (1) : 2x^2 = 50 \iff x = 5 \text{ ou } x = -5$$

$$(3) - (1) : 2y^2 = 18 \iff y = 3 \text{ ou } y = -3$$

De (2) on sait que x et y sont de signes contraires, ainsi les racines carrées complexes de $16 - 30i$ sont $5 - 3i$ et $-5 + 3i$.

$$\text{Les racines de } Q \text{ sont : } z_1 = \frac{-(1 - i) + 5 - 3i}{2} = 2 - i \text{ et } z_2 = \frac{-(1 - i) - 5 + 3i}{2} = -3 + 2i.$$

$$\text{Finalement } S = \{-3i; 2 - i; -3 + 2i\}$$

Question 2

((4+4)+10=18 points)

1. a) Écrivons $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$ sous forme trigonométrique :

$$|z_1| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_1) &= \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi_1) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z_1 = 8\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Écrivons $z_2 = -\sqrt{2}i$ sous forme trigonométrique :

$$z_2 = -\sqrt{2}i\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

- b) On en déduit :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{z_1}}{(z_2)^2} = \frac{8\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2} \\ &= \frac{8\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)}{2\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{4}\right)} \\ &= 4\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6} - \frac{-2\pi}{4}\right) \\ &= 4\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right) \quad (\text{forme trigonométrique}) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2 - 2\sqrt{3}i \quad (\text{forme algébrique}) \end{aligned}$$

2. $z = 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4 \cdot (-1 - i)^6$

Écrivons $z' = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ sous forme trigonométrique :

$$|z'| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi') &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi') &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z' = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Écrivons $z'' = -1 - i$ sous forme trigonométrique :

$$|z''| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi'') &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi'') &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi'' = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z'' = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

D'où

$$\begin{aligned} z &= 2 \cdot \left(2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^6 \\ &= 2 \cdot (2\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{2})^6 \operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{2}\right) \\ &= 2^{10} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{15\pi}{2}\right) \\ &= 2^{10} \operatorname{cis}\left(\frac{53\pi}{6}\right) \\ &= 2^{10} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Les racines cinquièmes complexes de z sont de la forme :

$$z_k = \sqrt[5]{2^{10}} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

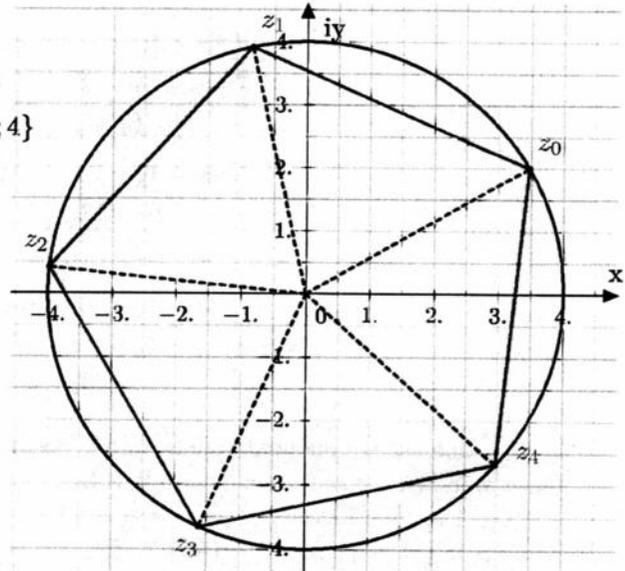
$$z_0 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{30}\right)$$

$$z_2 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{29\pi}{30}\right)$$

$$z_3 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{41\pi}{30}\right)$$

$$z_4 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{53\pi}{30}\right)$$



Question 3

(4+10=14 points)

1.

$$\begin{cases} 2mx + 4y + (m-1)z = m-2 \\ -x + (m+2)y - 2z = 3 \\ -my + z = 2-m \end{cases}$$

Méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2m & 4 & m-1 \\ -1 & m+2 & -2 \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 4m + m^2 - m - 4m^2 + 4 \\ &= -m^2 + 3m + 4 \\ &= -(m-4)(m+1) \end{aligned}$$

Le système admet une solution unique $\iff m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$

2. Si $m = 4$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 8x + 4y + 3z = 2 & (E_1) \\ -x + 6y - 2z = 3 & (E_2) \mid (E_1) + 8 \cdot (E_2) \\ -4y + z = -2 & (E_3) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 8x + 4y + 3z = 2 & (E_1) \\ 52y - 13z = 26 & (E_2) \\ -4y + z = -2 & (E_3) \mid (E_2) + 13 \cdot (E_3) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 8x + 4y + 3z = 2 & (E_1) \\ 4y - 1z = 2 & (E_2) \\ 0z = 0 & (E_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $y = \lambda \in \mathbb{R}$.

On a alors $4\lambda - z = 2 \iff z = -2 + 4\lambda$

et $8x + 4\lambda - 6 + 12\lambda = 2 \iff x = 1 - 2\lambda$

Donc $S = \{(1 - 2\lambda; \lambda; -2 + 4\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite

passant par le point $A(1; 0; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Si $m = -1$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2x + 4y - 2z = -3 & (E_1) \\ -x + y - 2z = 3 & (E_2) | (E_1) - 2 \cdot (E_2) \\ y + z = 3 & (E_3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2x + 4y - 2z = -3 & (E_1) \\ 2y + 2z = -9 & (E_2) \\ y + z = 3 & (E_3) | (E_2) - 2 \cdot (E_3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2x + 4y - 2z = -3 & (E_1) \\ 2y + 2z = -9 & (E_2) \\ 0z = -15 & (E_3) \text{ (équation impossible)} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est impossible. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

Si $m = -4$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -8x + 4y - 5z = -6 & (E_1) \\ -x - 2y - 2z = 3 & (E_2) | (E_1) - 8 \cdot (E_2) \\ 4y + z = 6 & (E_3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -8x + 4y - 5z = -6 & (E_1) \\ 20y + 11z = -30 & (E_2) | (E_2) - 5 \cdot (E_3) \\ 4y + z = 6 & (E_3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -8x + 4y - 5z = -6 & (E_1) \\ 20y + 11z = -30 & (E_2) \\ 6z = -60 & (E_3) \end{cases} \end{aligned}$$

(E_3) donne $z = -10$

En remplaçant dans (E_2) : $20y + 11 \cdot (-10) = -30 \Leftrightarrow 20y = 80 \Leftrightarrow y = 4$

Et dans (E_1) : $-8x + 4 \cdot 4 - 5 \cdot (-10) = -6 \Leftrightarrow -8x = -72 \Leftrightarrow x = 9$

Donc $\mathcal{S} = \{(9; 4; -10)\}$.

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent au point $B(9; 4; -10)$.

Question 4

(4+5+4+3=16 points)

1.

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in \pi_1 &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\
 &\iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0 \\
 &\iff \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -5 \\ y+2 & 2 & -4 \\ z-1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff (x-3) \cdot (6-8) - (y+2) \cdot (3-10) + (z-1) \cdot (-4+10) = 0 \\
 &\iff -2x + 7y + 6z + 14 = 0 \\
 &\text{(équation cartésienne du plan } \pi_1)
 \end{aligned}$$

2. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan π_1 .

Comme la droite d est perpendiculaire au plan π_1 , le vecteur \vec{n} est aussi un vecteur directeur de la droite d .

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in d &\iff \overrightarrow{DM} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \\
 &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) : \overrightarrow{DM} = k \cdot \vec{n} \\
 &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x+2 \\ y-16 \\ z-8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On trouve un système d'équations paramétriques de d :

$$d \equiv \begin{cases} x = -2 - 2k & (1) \\ y = 16 + 7k & (2) \\ z = 8 + 6k & (3) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Pour trouver un système d'équations cartésiennes, éliminons k :

$$(1) : k = -1 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{Dans (2) : } y = 16 - 7 - \frac{7}{2}x \iff 7x + 2y - 18 = 0$$

$$\text{Dans (3) : } z = 8 - 6 - \frac{6}{2}x \iff 3x + z - 2 = 0$$

$$\text{D'où un système d'équations cartésiennes de } d \equiv \begin{cases} 7x + 2y - 18 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

3. Soit H le point de percée de d dans π_1 .

$$H(x; y; z) \in d \cap \pi_1 \iff \begin{cases} x = -2 - 2k & (1) \\ y = 16 + 7k & (2) \\ z = 8 + 6k & (3) \\ -2x + 7y + 6z + 14 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4) :

$$-2(-2 - 2k) + 7(16 + 7k) + 6(8 + 6k) + 14 = 0 \iff 89k + 178 = 0 \iff k = -2$$

En remplaçant successivement dans (1), (2) et (3), on obtient $x = 2$, $y = 2$ et $z = -4$.

La droite d perce le plan π_1 au point $H(2; 2; -4)$.

4. Le plan π_2 comprend la droite d et le point E , donc le vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ de la droite d est aussi un vecteur directeur du plan π_2 . Un deuxième vecteur directeur du plan est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in \pi_2 &\iff \overrightarrow{EM}, \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \begin{cases} x = -2 - 2\alpha \\ y = 1 + 7\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 6\alpha + 2\beta \end{cases} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$