EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	06.06.23	*Durée :*	08:15 - 10:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG

Question 1 (6+4+5+6+7=28 points)

a. $z^2+(2+5i)z-9+7i=0$

$\Delta=(2+5i)^2-4\cdot1\cdot(-9+7i)=-21+20i+36-28i=15-8i$

Soit $u=x+yi$ $(x,y$ réels$)$ tel que : $u^2=\Delta$. Alors :

$$\begin{cases} x^2-y^2=15 & (1)\\ 2xy=-8 & (2)\\ x^2+y^2=\sqrt{15^2+(-8)^2}=17 & (3)\end{cases}$$

$(1)+(3)$: $2x^2=32\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=-4\vee x=4$

$(3)-(1)$: $2y^2=2\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=-1\vee y=1$

D'après (2), x et y sont de signes opposés, donc : $u=-4+i\vee u=4-i$

$$z_1=\frac{-2-5i-4+i}{2}=-3-2i$$

$$z_2=\frac{-2-5i+4-i}{2}=1-3i$$

$\boxed{S=\{-3-2i\,;1-3i\}}$

b. Posons : $z=x+iy$ $(x,y$ réels$)$

$$\begin{aligned} 2z+1-i=(1-i)\bar{z} &\Leftrightarrow 2x+2iy+1-i=(1-i)(x-iy)\\ &\Leftrightarrow 2x+1+i(2y-1)=x-y-i(x+y)\\ &\Leftrightarrow x+y+1+i(x+3y-1)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1\\ x+3y=1 \end{cases} \quad L2\leftrightarrow L2-L1\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 & (1)\\ 2y=2 & (2)\end{cases}\end{aligned}$$

(2) : $2y=2\Leftrightarrow y=1$

$\boxed{y=1}\rightarrow(1)$: $x+1=-1\Leftrightarrow x=-2$

$\boxed{S=\{-2+i\}}$

c. Calcul de $P(2-3i)$ à l'aide du schéma de Horner

	1	$3i$	$-1+6i$	$-6+9i$
$2-3i$	0	$2-3i$	$4-6i$	$6-9i$
	1	2	3	0

Donc $P(2-3i)=0$ c'est-à-dire $2-3i$ est une racine de P.

Division de P par $(z-2+3i)$: $P(z)=(z-2+3i)\underbrace{(z^2+2z+3)}_{Q(z)}$

Résolution de l'équation $Q(z)=0$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot3=-8$

$z_1=\dfrac{-2-\sqrt{8}i}{2}=\dfrac{-2-2\sqrt{2}i}{2}=-1-\sqrt{2}i$

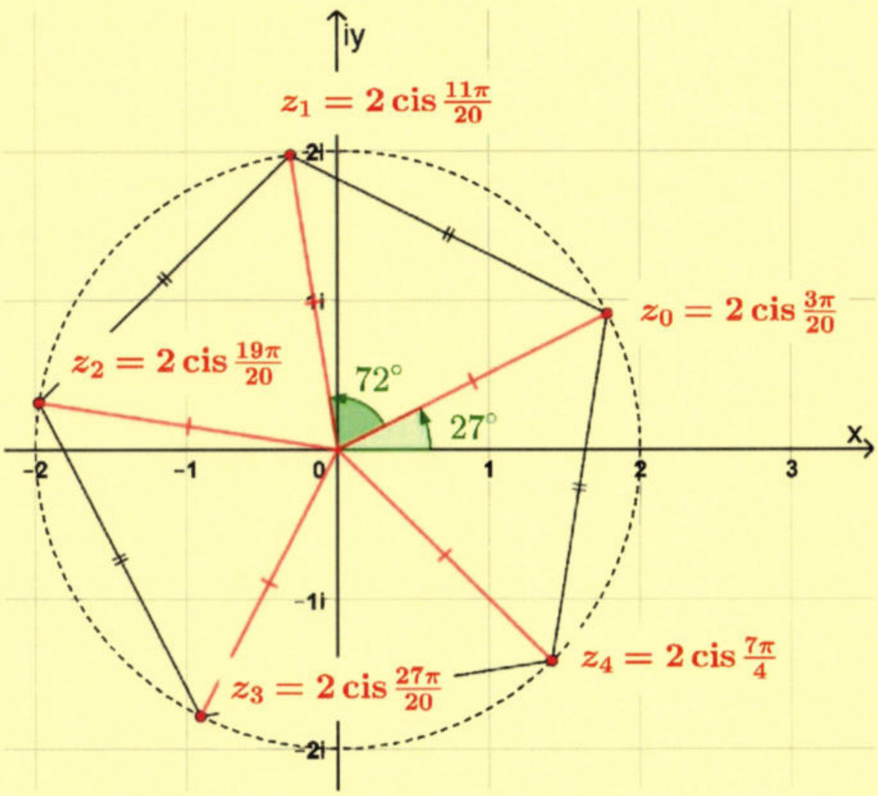
$z_2=\dfrac{-2+\sqrt{8}i}{2}=-1+\sqrt{2}i$

$\boxed{S=\{2-3i\,;-1-\sqrt{2}i\,;-1+\sqrt{2}i\}}$

d. $32i\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=2^5\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=2^5\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$

$z^5=2^5\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow z=2\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{20}+k\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$ (k entier)

$\boxed{S=\left\{2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{20}\,;2\operatorname{cis}\frac{11\pi}{20}\,;2\operatorname{cis}\frac{19\pi}{20}\,;2\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}\,;2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\right\}}$



e. $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$; $\arg(z_1) \underset{z_1 \in \text{II quadrant}}{=} +\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; $\arg(z_2) \underset{z_2 \in \text{IV quadrant}}{=} -\cos^{-1}\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$|z_3| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$; $\arg(z_3) \underset{z_3 \in \text{III quadrant}}{=} -\cos^{-1}\frac{0}{1} = -\cos^{-1}0 = -\frac{\pi}{2}$

$z_3 = -i = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Forme trigonométrique de Z

$$Z = \frac{z_1^3 z_2^5}{z_3^{2023}} = \frac{2^3\operatorname{cis}\frac{5\pi}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^5\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{\operatorname{cis}\left(-\frac{2023\pi}{2}\right)} = \frac{1024\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}}{\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = 1024\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{4} = 1024\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$$

Forme algébrique de Z

$$Z = 1024\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} = 1024\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 1024\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1024 + 1024i$$

Question 2 (6+4+3+4=17 points)

$$\boxed{\begin{cases}(m-1)x & + & y & + & z & = & 2m\\ 2x & - & my & + & (m+2)z & = & m+1\\ 2x & + & my & - & z & = & 7\end{cases}}$$

a. $\Delta = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1\\ 2 & -m & m+2\\ 2 & m & -1\end{vmatrix}$ (on développe suivant la première colonne)

$$= (m-1)\cdot\begin{vmatrix}-m & m+2\\ m & -1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ m & -1\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -m & m+2\end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(m-m^2-2m)-2(-1-m)+2(m+2+m)$$

$$= (m-1)(-m^2-m)+2+2m+4+4m$$

$$= -m^3+m+6m+6$$

$$= -m^3+7m+6$$

$-(-1)^3+7\cdot(-1)+6=1-7+6=0$

$-m^3+7m+6$ est donc divisible par $m+1$

<u>Schéma de Horner</u>

	-1	0	7	6
-1	0	1	-1	-6
	-1	1	6	0

$\Delta=-m^3+7m+6=(m+1)(-m^2+m+6)=-(m+1)(m+2)(m-3)$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=-2 \vee m=-1 \vee m=3$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m\neq -2 \wedge m\neq -1 \wedge m\neq 3$.

b. $\boxed{m=-3}$

$$\begin{cases}\boxed{-4}x & + & y & + & z & = & -6\\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2\\ 2x & - & 3y & - & z & = & 7\end{cases}\quad\begin{array}{|l}\\ L2\leftrightarrow 2L2+L1\\ L3\leftrightarrow 2L3+L1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x & + & y & + & z & = & -6\\ & & \boxed{7}y & - & z & = & -10\\ & & -5y & - & z & = & 8\end{cases}\quad\begin{array}{|l}\\ \\ L3\leftrightarrow 7L3+5L2\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x & + & y & + & z & = & -6\\ & & 7y & - & z & = & -10\\ & & & & -12z & = & 6\end{cases}\quad\begin{array}{|l}(1)\\ (2)\\ (3)\end{array}$$

(3) : $12z=-6 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}$

$\rightarrow(2)$: $7y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-10 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}$

$\rightarrow(1)$: $-4x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-6 \Leftrightarrow x=1$

$S=\left\{\left(1;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$

<u>Interprétation géométrique</u>

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui se coupent au point $I\left(1;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

c. $\boxed{m=-1}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} \boxed{-2}x & + & y & + & z & = & -2 & \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 & L2 \leftrightarrow L2+L1 \\ 2x & - & y & - & z & = & 7 & L3 \leftrightarrow L3+L1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} -2x & + & y & + & z & = & -2 & (1) \\ & & 2y & + & 2z & = & -2 & (2) \\ & & & & 0 & = & 5 & (3) \end{array}\right.$$

Comme (3) est impossible, le système est impossible.

$S=\varnothing$

<u>Interprétation géométrique</u>

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui n'ont aucun point en commun.

d. $\boxed{m=3}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} \boxed{2}x & + & y & + & z & = & 6 & \\ 2x & - & 3y & + & 5z & = & 4 & L2 \leftrightarrow L2-L1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 7 & L3 \leftrightarrow L3-L1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & y & + & z & = & 6 & \\ & & \boxed{-4}y & + & 4z & = & -2 & \\ & & 2y & - & 2z & = & 1 & L3 \leftrightarrow 2L3+L2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & y & + & z & = & 6 & (1) \\ & & -4y & + & 4z & = & -2 & (2) \\ & & & & 0 & = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

Comme (3) est indéterminée, le système est simplement indéterminé.

En posant $z=\lambda$,

$(2)\ :\ -4y+4\lambda=-2 \Leftrightarrow y=\lambda+\frac{1}{2}$

$\rightarrow(1)\ :\ 2x+\lambda+\frac{1}{2}+\lambda=6 \Leftrightarrow x=-\lambda+\frac{11}{4}$

$S=\left\{\left(-\lambda+\frac{11}{4};\lambda+\frac{1}{2};\lambda\right):\lambda \text{ réel}\right\}$

<u>Interprétation géométrique</u>

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui se coupent en la droite d passant par $A\left(\frac{11}{4};\frac{1}{2};0\right)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

<u>Question 3 (1+4+2+5+1+2 = 15 points)</u>

a. $A(2;1;1)$; $B(-2;4;0)$; $C(3;2;3)$ et $D(-3;2;3)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}1=-4\lambda\\1=3\lambda\\2=-\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{4}\\\lambda=\frac{1}{3}\\\lambda=-2\end{cases}$$ impossible, donc A, B et C ne sont pas alignés.

<u>OU</u>

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-4&1&\vec{i}\\3&1&\vec{j}\\-1&2&\vec{k}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4&1\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}=7\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}\neq\vec{0}$$

Donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. $$\begin{aligned}M(x;y;z)\in\pi &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2&-4&1\\y-1&3&1\\z-1&-1&2\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow(x-2)\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}-4&1\\-1&2\end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix}-4&1\\3&1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow(x-2)\cdot7-(y-1)\cdot(-7)+(z-1)\cdot(-7)=0\\
&\Leftrightarrow 7x+7y-7z-14=0\\
&\Leftrightarrow x+y-z-2=0\end{aligned}$$

$\boxed{\pi\equiv x+y-z-2=0}$

<u>OU</u>

$\vec{n}=\frac{1}{7}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π, donc : $\pi\equiv x+y-z+k=0$ (k réel)

$A(2;1;1)\in\pi\Leftrightarrow 2+1-1+k=0\Leftrightarrow k=-2$

$\boxed{\pi\equiv x+y-z-2=0}$

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π, donc un vecteur directeur de d et $\boxed{d\equiv\begin{cases}x=-3+\lambda\\y=2+\lambda\\z=3-\lambda\end{cases}}$ (λ réel)

d. $d' \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+3z=-1 \end{cases} \quad \left| L2 \leftrightarrow L2-2L1 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2y+z=-3 \end{cases}$

Système d'équations paramétriques de $d' \equiv \begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda \quad (\lambda \text{ réel}) \\ z=\lambda \end{cases}$

Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v'}=1\cdot(-3)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=-6\neq 0$, donc $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{v'}$ et d' n'est pas parallèle à π.

<u>*OU*</u>

Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v'}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \vec{i} \\ -1 & 0 & \vec{j} \\ 1 & 3 & \vec{k} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}=-3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, donc : $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v'}=1\cdot(-3)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=-6\neq 0$, donc $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{v'}$ et d' n'est pas parallèle à π.

e. $\begin{cases} -2-(-2)+1=1 \\ 2\cdot(-2)+3\cdot 1=-1 \end{cases}$, donc : $E(-2;-2;1)\in d'$

f. vecteurs directeurs de π' : $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\pi' \equiv \begin{cases} x=-3-3\lambda+\mu \\ y=2-\lambda-4\mu \quad (\lambda,\mu \text{ réels}) \\ z=3+2\lambda-2\mu \end{cases}}$$