



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CD	Date de l'épreuve :	02.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

Question 1 (9+4=13 points) Question obligatoire

a) $z = \frac{(2-2i)^7}{(4+4\sqrt{3}i)^3}$

Posons $z' = 2 - 2i$

Module $|z'| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos \varphi' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin \varphi' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\varphi' = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

Donc $z' = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$ (2pts)

Posons $z'' = 4 + 4\sqrt{3}i$

Module $|z''| = 8$

$\cos \varphi'' = \frac{1}{2}$ $\sin \varphi'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\varphi'' = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

Donc $z'' = 8 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$ (2pts)

$$z = \frac{(2\sqrt{2} \operatorname{cis} (-\frac{\pi}{4}))^7}{(8 \operatorname{cis} (\frac{\pi}{3}))^3} = \frac{2^7 \sqrt{2}^6 \sqrt{2} \operatorname{cis} (-\frac{7\pi}{4})}{2^9 \operatorname{cis} (\frac{3\pi}{3})} = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{7\pi}{4} - \pi \right) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{11\pi}{4} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -2 - 2i$$
 (5pts)

b) $z = -81 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 81 \operatorname{cis} (\pi) \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 81 \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{4} \right) = 81 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

Les racines quatrièmes sont données par $z_k = \sqrt[4]{81} \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right)$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$z_0 = 3 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{16} \right) \quad z_1 = 3 \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{16} \right) \quad z_2 = 3 \operatorname{cis} \left(\frac{15\pi}{16} \right) \quad z_3 = 3 \operatorname{cis} \left(\frac{23\pi}{16} \right)$$

Question 2 (4+4+6+3=17 points) Question obligatoire

a) $A(-3; 2; 4)$, $B(0; -2; 7)$ et $C(-4; 3; -5)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\nexists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 3 & -1 \\ y-2 & -4 & 1 \\ z-4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 33x + 24y - z + 55 = 0$$

Donc $\pi \equiv 33x + 24y - z + 55 = 0$.

b) Comme $d \perp \pi$, un vecteur directeur de d est un vecteur normal à π : $\vec{n} \begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix}$

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{EM} = k\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 33k - 1 & (1) \\ y = 24k + 6 & (2) \\ z = -k + 1 & (3) \end{cases} \quad \text{équations paramétriques de } d$$

$$(3) \Leftrightarrow k = -z + 1$$

$$\text{dans (1): } x = -33z + 33 - 1$$

$$\text{dans (2): } y = -24z + 24 + 6$$

$$\text{Donc on trouve } \begin{cases} x + 33z - 32 = 0 \\ y + 24z - 30 = 0 \end{cases}$$

équations cartésiennes de d

$$\text{c) } d' \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Posons $y = k, k \in \mathbb{R}$

$$\text{On obtient } \begin{cases} x = \frac{1}{2}k + 2 \\ y = k \\ z = \frac{1}{3}k + \frac{2}{3} \end{cases}$$

D'où $F\left(2; 0; \frac{2}{3}\right)$ est un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d' .

Comme d' est contenue dans π' , $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de π' .

$M(x;y;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GF}$ et $\vec{u}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GF}; \vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & \frac{1}{2} \\ y+2 & 2 & 1 \\ z-3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{3}{2}y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

Donc $\pi' \equiv 2x - y - 4 = 0$.

d) Pour trouver les coordonnées du point I , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x = 33k - 1 & (1) \\ y = 24k + 6 & (2) \\ z = -k + 1 & (3) \\ 2x - y - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4): $42k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{7}$

Donc $\begin{cases} x = \frac{59}{7} \\ y = \frac{90}{7} \\ z = \frac{5}{7} \end{cases}$

$$I\left(\frac{59}{7}; \frac{90}{7}; \frac{5}{7}\right)$$

Question 3 (4+11=15 points) Question obligatoire

a)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + my - z = -1 \\ (m+1)x + (m+1)y + (m-1)z = 0 \end{cases}$$

Soit $A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 \\ m+1 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 \\ m+1 & m+1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + m + 1 + 2(m+1) - (2m(m+1) - (m+1) - (m-1)) = -m^2 + 2m + 3 = -(m+1)(m-3)$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow -(m+1)(m-3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 3$

Le système admet donc une solution unique si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

b)

*si $m = -2$

(4pts)

Le système s'écrit $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y - z = -1 \\ -x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (1) \\ x - 2y - z = -1 & (2) \\ x + y + 3z = 0 & (3) \end{cases}$

(1): $x = y - 2z + 1$ (1)'

Dans (2): $-y - 3z = -2 \Leftrightarrow y = 2 - 3z$ (2)'

Dans (3): $2y + z = -1$ (3)'

(2)' dans (3)': $4 - 5z = -1 \Leftrightarrow z = 1$

Dans (2)': $y = -1$

Dans (1)': $x = -2$

$$S = \{(-2; -1; 1)\}$$

Si $m = -2$, les trois plans se coupent en un point de coordonnées $(-2; -1; 1)$.

***si $m = -1$**

(2pts)

Le système s'écrit
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (1) \\ x - y - z = -1 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1): x = y - 2z + 1 \quad (1)'$

(3) et $(1)'$ dans (2) : $1 = -1$ impossible

$$S = \emptyset$$

Si $m = -1$, les trois équations du système sont celles de trois plans qui n'ont pas de point en commun.

***si $m = 3$**

(5pts)

Le système s'écrit
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = -1 \\ 4x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (1) \\ x + 3y - z = -1 & (2) \\ 2x + 2y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1): x = y - 2z + 1 \quad (1)'$

Dans (2) : $4y - 3z = -2$

Dans (3) : $4y - 3z = -2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}z - \frac{1}{2} \quad (3)'$

Système indéterminé : posons $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dans $(3)'$: $y = \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}$

Dans $(1)'$: $x = -\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}$

$$S = \left\{ \left(-\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}; \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $m = 3$, les trois équations du système sont celles de trois plans qui se coupent en une droite de

vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

Alternatives $S = \left\{ \left(-\frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3}; \beta; \frac{4}{3}\beta + \frac{2}{3} \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\gamma; -\frac{3}{5}\gamma - \frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\gamma + \frac{2}{5} \right) \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

Question 4 (11+4=15 points) Question au choix

a) $P(z) = z^3 - (9 - 6i)z^2 + (43 - 54i)z + 5 + 168i$.

Schéma	de	1	$-9 + 6i$	$43 - 54i$	$5 + 168i$
Horner	$2 - 7i$		$2 - 7i$	$-21 + 47i$	$-5 - 168i$
		1	$-7 - i$	$22 - 7i$	0

Donc $2 - 7i$ est une racine de P .

D'où $P(z) = (z - 2 + 7i)(z^2 - (7 + i)z + 22 - 7i)$ (3pts)

Reste à résoudre $z^2 - (7 + i)z + 22 - 7i = 0$

$\Delta = (7 + i)^2 - 4(22 - 7i) = -40 + 42i$ (1pt)

Soit $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) une racine carrée complexe de Δ .

Ainsi on obtient :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -40 & (1) \\ 2xy = 42 & (2) \\ x^2 + y^2 = 58 & (3) \end{cases}$$

(1) + (3): $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

(1) - (3): $-2y^2 = -98 \Leftrightarrow y = 7$ ou $y = -7$

(2) implique que x et y sont de même signe.

Donc $\delta_1 = 3 + 7i$ et $\delta_2 = -3 - 7i$. (4pts)

D'où $z_1 = \frac{7+i+3+7i}{2} = 5 + 4i$ et $z_2 = \frac{7+i-3-7i}{2} = 2 - 3i$ (2pts)

Finalement $S = \{2 - 7i; 5 + 4i; 2 - 3i\}$

Et $P(z) = (z - 2 + 7i)(z - 5 - 4i)(z - 2 + 3i)$ (1pt)

b) $(-3 + 2i)z - (2 + i)\bar{z} = 4$

Posons $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). On obtient

$$\begin{aligned} & (-3 + 2i)(x + yi) - (2 + i)(x - yi) = 4 \\ \Leftrightarrow & -3x - 3yi + 2xi - 2y - 2x + 2yi - xi - y = 4 \\ \Leftrightarrow & -5x - 3y + xi - yi = 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -5x - 3y = 4 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

De (2): $x = y$

Dans (1): $-5y - 3y = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

Dans (2): $x = -\frac{1}{2}$ $S = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

Question 5 (9+2+4=16 points) Question au choix

a)
$$\begin{aligned} Z = \frac{z_1^2}{z_2} &= \frac{(-3 + \sqrt{3}i)^2}{3i \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{9 - 6\sqrt{3}i - 3}{3i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{6(1 - \sqrt{3}i)}{3\frac{\sqrt{2}}{2}i(1 + i)} = \frac{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{-1 + i} = \frac{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{-1 + i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i)}{-2} = -\sqrt{2} - \sqrt{6} + (-\sqrt{2} + \sqrt{6})i \end{aligned}$$

(5pts)

$$Z = \frac{z_1^2}{z_2} = \frac{6(1 - \sqrt{3}i)}{3i \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2 \cdot 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 4 \operatorname{cis}\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$
 (4pts)

b) On en déduit que

$$4\text{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{6} + (-\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{6} \\ 4\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} \cdot \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{2 - 4\sqrt{3} + 6}{2 - 6} = -2 + \sqrt{3}$$

c) $z_2 = 3i\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Les racines quatrièmes sont données par $u_k = \sqrt[4]{3}\text{cis}\left(\frac{3\pi + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$u_0 = \sqrt[4]{3}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \quad u_1 = \sqrt[4]{3}\text{cis}\left(\frac{11\pi}{16}\right) \quad u_2 = \sqrt[4]{3}\text{cis}\left(\frac{19\pi}{16}\right) \quad u_3 = \sqrt[4]{3}\text{cis}\left(\frac{27\pi}{16}\right)$$
