EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

CORRIGÉ

Date :	23.09.24	*Horaire :*	08:15 - 10:00	*Durée :*	105 minutes
Discipline :	MATHE - STRUC	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG
				Numéro du candidat :	

Question 1 **[5 + 7 + 3 + 5 = 20 points]**

1. Schéma de Horner :

	1	$1-2i$	$33+8i$	$265-106i$
$-5+2i$		$-5+2i$	$20-8i$	$-265+106i$
	1	-4	53	0

Ainsi, $P(-5+2i)=0$ et $-5+2i$ est une racine de P.

$\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z+5-2i)\underbrace{\left(z^2-4z+53\right)}_{=Q(z)}$

Calcul des racines de Q : $\Delta=16-4\cdot 53=-196=(14i)^2$; $z_1=\dfrac{4-14i}{2}=2-7i$; $z_2=\dfrac{4+14i}{2}=2+7i$

Factorisation de P : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z+5-2i)\cdot Q(z)=(z+5-2i)(z-2+7i)(z-2-7i)$

2. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

$-3-3i=3\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=3\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\dfrac{5\pi}{4}$

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{6}\ \mathrm{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$Z=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^5(-3-3i)^3}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^7}=\frac{\sqrt{2}^5\mathrm{cis}\frac{10\pi}{3}\cdot(3\sqrt{2})^3\ \mathrm{cis}\frac{15\pi}{4}}{\sqrt{6}^7\mathrm{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{cis}\frac{33\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}\quad\text{(f. trigo.)}$$

$Z=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ (f. alg.)

3. On pose : $z=R\ \mathrm{cis}(\varphi)$, avec $R\in\mathbb{R}_+$ et $\varphi\in\mathbb{R}$.

$$z^5+32i=0\Leftrightarrow R^5\mathrm{cis}(5\varphi)=32\ \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}R=2\\ \varphi=\frac{3\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\ z=2\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{10}+k\frac{4\pi}{10}\right),\ k\in\{0;1;2;3;4\}$$

$$\boxed{S=\left\{2\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{10}\right);\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{10}\right);\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{11\pi}{10}\right);\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right);\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{19\pi}{10}\right)\right\}}$$

4. $z^2-6z+11=(13-z)\mathrm{i} \Leftrightarrow z^2+(-6+\mathrm{i})z+(11-13\mathrm{i})=0$

$\Delta=(-6+\mathrm{i})^2-4(11-13\mathrm{i})=35-12\mathrm{i}-44+52\mathrm{i}=-9+40\mathrm{i}$

Soit $\delta=x+y\mathrm{i}$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, une racine carrée complexe de Δ.

$$\delta^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-9 & (1)\\ 2xy=40 & (2)\\ x^2+y^2=\sqrt{9^2+40^2}=41 & (3)\end{cases}$$

(2) : x et y ont même signe

$\frac{(3)+(1)}{2}$: $x^2=16 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=4$ $\quad$ $\frac{(3)-(1)}{2}$: $y^2=25 \Leftrightarrow y=-5 \vee y=5$

Donc : $\delta=-4-5\mathrm{i} \vee \delta=4+5\mathrm{i}$

c.-à-d. $z=\dfrac{6-\mathrm{i}+4+5\mathrm{i}}{2}=5+2\mathrm{i} \vee z=\dfrac{6-\mathrm{i}-4-5\mathrm{i}}{2}=1-3\mathrm{i}$ $\quad$ $\boxed{S=\{5+2\mathrm{i}\ ;\ 1-3\mathrm{i}\}}$

Question 2

[1 + 3 + 3 + 3 + 4 = 14 points]

a. $A(1;2;3)\notin d$, car le système $\begin{cases}1=-2+6k\\2=1-3k\\3=-1+5k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{3}\\k=\frac{4}{5}\end{cases}$ n'admet pas de solution.

b. La droite d passe par le point $B(-2;1;-1)$ et admet le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Le plan π_1 contient A et d, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de π_1.

Donc : $\pi_1 \equiv \begin{cases}x=1+6k+3\ell\\y=2-3k+\ell\\z=3+5k+4\ell\end{cases}$, avec $k,\ell\in\mathbb{R}$

c. Le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est normal au plan π_2.

$M(x;y;z)\in\pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot 6+(y-2)\cdot(-3)+(z-3)\cdot 5=0$

$\Leftrightarrow \boxed{6x-3y+5z-15=0}$ $\quad$ équation cartésienne du plan π_2

d. Par substitution de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne de π_2 :

$6(-2+6k)-3(1-3k)+5(-1+5k)-15=0 \Leftrightarrow 70k=35 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$

$I(x;y;z)\in\pi_2\cap d \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+6\cdot\frac{1}{2}=1\\y=1-3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\\z=-1+5\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$, c.-à-d. la droite d perce le plan π_2 au point $\boxed{I\left(1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)}$.

e. $M(x\,;y\,;z)\in d \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{5}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x+2y=0 \\ 5x-6z=-4 \\ (5y+3z=2) \end{cases}}$$ système d'équations cartésiennes de d

Question 3 **[4 + 1 + 4 = 9 points]**

a. Déterminant de la matrice associée au système :

$$D_m=\begin{vmatrix} 1 & m & -2 \\ -2 & -2 & m+3 \\ -2 & m & 1 \end{vmatrix}=1\left(-2-m^2-3m\right)+2\left(m+2m\right)-2\left(m^2+3m-4\right)$$

$$=-3\left(m^2+m-2\right)=-3(m-1)(m+2)$$

Σ_m admet une solution unique $\Leftrightarrow D_m\neq 0 \Leftrightarrow \quad m\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

b. $\Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ y-2z\ =3 \\ -2x-2y+4z\ =-3 \\ -2x+\ y+\ z\ =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+4z\ =-6\ (1) \\ -2x-2y+4z\ =-3\ (2) \\ -2x+\ y+\ z\ =0 \end{cases}$ Les équations (1) et (2) sont incompatibles.

$S_1=\varnothing$

c. $\Sigma_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z\ =\ 0 \\ -2x-2y+\ \ z\ =-3 \\ -2x-2y+\ \ z\ =-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z\ =\ 0 \\ -2x-2y+\ \ z\ =-3 \end{cases}$

On pose : $z=k\in\mathbb{R}$.

Alors : $\begin{cases} x-2y\ =\ 2k \\ -2x-2y\ =-3-k \end{cases} \overset{\text{Cramer}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2k & -2 \\ -3-k & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-6-6k}{-6}=1+k \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2k \\ -2 & -3-k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-3+3k}{-6}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}k \end{cases}$

$S_{-2}=\left\{\left(1+2\lambda\,;\ \tfrac{1}{2}-\lambda\,;\ 2\lambda\right)\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ ou $S_{-2}=\{(2-2\lambda\ ;\ \lambda\ ;\ 1-2\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$

$S_{-2}=\{(2\lambda\ ;\ 1-\lambda\ ;-1+2\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique

Les équations du système Σ_{-2} sont celles de trois plans de l'espace dont deux sont confondus et coupent le 3[e] suivant la droite passant par le point $A\left(1;\dfrac{1}{2};2\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 4 **[5 + (2 + 3 + 2) + (2+ 3) = 17 points]**

1. Par la formule du binôme de Newton :

$$\left(3x^4-\frac{2}{x^3}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(3x^4\right)^k\left(-2x^{-3}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\cdot 3^k\left(-2\right)^{12-k}x^{4k-36+3k}$$

Condition : $4k-36+3k=-15 \Leftrightarrow k=3$

Le terme en x^{-15} est donc : $C_{12}^{3}\cdot 3^3\left(-2\right)^{12-3}x^{15}=-3\ 041\ 280\ x^{-15}$

2. Nombre de possibilités pour choisir 4 élèves parmi 55 : $C_{55}^{4}=341\ 055$

Pour réaliser *S*, on choisit 2 élèves parmi les 25 élèves de la classe *A*
et 2 élèves parmi les 30 élèves de la classe *B*.

Nombre de cas favorables : $C_{25}^{2}\cdot C_{30}^{2}$

$$P(S)=\frac{C_{25}^{2}\cdot C_{30}^{2}}{C_{55}^{4}}=\frac{2900}{7579}\approx 38,26\,\%$$

Pour réaliser *T*, on choisit 4 élèves parmi les 25 élèves de la classe *A*
ou 4 élèves parmi les 30 élèves de la classe *B*.

Nombre de cas favorables : $C_{25}^{4}\cdot C_{30}^{0}+C_{25}^{0}\cdot C_{30}^{4}$

$$P(T)=\frac{C_{25}^{4}\cdot C_{30}^{0}+C_{25}^{0}\cdot C_{30}^{4}}{C_{55}^{4}}=\frac{8011}{68211}\approx 11,74\,\%$$

$$P(U)=1-P(T)=\frac{60200}{68211}\approx 88,26\,\%$$

Méthode alternative

Pour réaliser *U*, on choisit 1 élève parmi les 25 de la classe *A* et 3 parmi les 30 de la classe *B*
ou 2 élèves parmi les 25 de la classe *A* et 2 parmi les 30 de la classe *B*
ou 3 élèves parmi les 25 de la classe *A* et 1 parmi les 30 de la classe *B*.

Nombre de cas favorables : $C_{25}^{1}\cdot C_{30}^{3}+C_{25}^{2}\cdot C_{30}^{2}+C_{25}^{3}\cdot C_{30}^{1}$

$$P(U)=\frac{C_{25}^{1}\cdot C_{30}^{3}+C_{25}^{2}\cdot C_{30}^{2}+C_{25}^{3}\cdot C_{30}^{1}}{C_{55}^{4}}\approx 88,26\,\%$$

3. a. On choisit la position des 2 boules bleues parmi 6 positions
et on choisit un arrangement de 2 boules bleues parmi 5
et on choisit un arrangement de 4 boules jaunes parmi 10.

Nombre de tirages possibles : $C_6^2\cdot A_5^2\cdot A_{10}^4=1\ 512\ 000$

b. On tire « jaune $\rightarrow$ bleu $\rightarrow$ jaune $\rightarrow$ 3 boules quelconques »
ou on tire « bleu $\rightarrow$ jaune $\rightarrow$ jaune $\rightarrow$ 3 boules quelconques ».

Nombre de tirages possibles : $10\cdot 5\cdot 9\cdot A_{12}^3+5\cdot 10\cdot 9\cdot A_{12}^3=1\ 188\ 000$