EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

CORRIGÉ

Date :	07.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:00		*Durée :*	105 minutes
Discipline :	MATHE - STRUC	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG		
					Numéro du candidat :		

Question 1 [11 points]

$P(z)=z^3-4z^2-(5+12i)z-40+18i$

Soit bi la racine imaginaire pure de P, $b\in\mathbb{R}$. [0,5]

$$\begin{aligned}P(bi)=0 &\Leftrightarrow (bi)^3-4(bi)^2-(5+12i)\cdot bi-40+18i=0\\ &\Leftrightarrow -b^3i+4b^2-5bi+12b-40+18i=0\\ &\Leftrightarrow \left(4b^2+12b-40\right)-\left(b^3+5b-18\right)i=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}4b^2+12b-40=0 & (1)\\ b^3+5b-18=0 & (2)\end{cases}\end{aligned}$$ [1,5]

Résolvons (1) :

$4b^2+12b-40=0 \Leftrightarrow b^2+3b-10=0 \Leftrightarrow b=-5$ ou $b=2$ [1]

$b=-5$ n'est pas une solution de (2) car $(-5)^3+5\cdot(-3)-18=-158\neq 0$

$b=2$ est une solution de (2) car $2^3+5\cdot 2-18=0$

Donc $z=2i$ est la racine imaginaire pure de P. [1]

Schéma de Horner :

	1	-4	$-5-12i$	$-40+18i$
$2i$		$2i$	$-4-8i$	$40-18i$
	1	$-4+2i$	$-9-20i$	0

$P(z)=(z-2i)\underbrace{\left(z^2+(-4+2i)z-9-20i\right)}_{Q(z)}$ [2]

Posons $Q(z)=0$

$$\begin{aligned}\Delta&=(-4+2i)^2-4\cdot 1\cdot(-9-20i)\\ &=16-16i-4+36+80i\\ &=48+64i\end{aligned}$$ [1]

Soit $u = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une r.c.c. de Δ.

$$(x+yi)^2 = 48 + 64i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 48 & (1) \\ 2xy = 64 & (2) \end{cases}$$

D'autre part $x^2 + y^2 = \sqrt{48^2 + 64^2} = 80$ (3)

$(1)+(3)$: $2x^2 = 128 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm 8$

$(3)-(1)$: $2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

De (2), on conclut que x et y sont de même signe.
Les r.c.c. de Δ sont donc $u_1 = 8 + 4i$ et $u_2 = -8 - 4i$. [2,5]

Les racines de Q sont:

$z_1 = \dfrac{4-2i+8+4i}{2} = \dfrac{12+2i}{2} = 6+i$ et $z_2 = \dfrac{4-2i-8-4i}{2} = \dfrac{-4-6i}{2} = -2-3i$ [1]

$S = \{2i; 6+i; -2-3i\}$ [0,5]

Question 2 [(6 + 2) + 3 = 11 points]

1. a. • $\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$ [0,5]

$$-\sqrt{3}-\sqrt{3}i = \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right)$$
$$= \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= \sqrt{6}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$ [1]

• $\left|3-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ [0,5]

$$3-\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$ [1]

Donc :

$$z_1 = \frac{\left(\sqrt{6}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{16}}{\left(2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{8}}$$
$$= \frac{6^8 \mathrm{cis}(-12\pi)}{2^8 \cdot 3^4 \mathrm{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{2^8\cdot 3^8\operatorname{cis}(0\pi)}{2^8\cdot 3^4\operatorname{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$=3^4\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=81\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \qquad f.t.\text{ de } Z_1$$

$$=81\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{81}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{2}i \qquad f.a.\text{ de } Z_1$$

[3]

b. Les racines quatrièmes de Z_1 sont :

$$u_k=\sqrt[4]{81}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$$

$$=3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad \text{avec } k\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$$

$$u_0=3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$u_1=3\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_2=3\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$u_3=3\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=3\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

[2]

2. $$Z_2=(1-3i)^2-\frac{10(2-i)}{i+2}+\frac{5}{i-2}$$

$$=1-6i-9-\frac{10(2-i)(i-2)}{(i+2)(i-2)}+\frac{5(i+2)}{(i-2)(i+2)}$$

$$=-8-6i-\frac{10(2i-4+1+2i)}{-5}+\frac{5i+10}{-5}$$

$$=-8-6i-\frac{40i-30}{-5}-i-2$$

$$=-8-6i+8i-6-i-2$$

$$=-16+i$$

[3]

Question 3 **[3 + 4 = 7 points]**

a. Soit M la matrice associée au système (S).

$$\det(M)=\begin{vmatrix} m+1 & 4-m & -m \\ -m & 0 & -4 \\ m & m & m \end{vmatrix}$$

$$=-4m(4-m)+m^3+4m(m+1)+m^2(4-m)$$

$$=-16m+4m^2+m^3+4m^2+4m+4m^2-m^3$$

$$=12m^2-12m$$ [2]

Le système admet une solution unique si et seulement si $\det(M)\neq 0$.

$\det(M)=0 \Leftrightarrow 12m^2-12m=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=1$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ [1]

b. Si $m=0$, alors le système devient :

$$\begin{cases} x+4y=7 \\ -4z=3 \\ 0=1 \end{cases}$$

Ce système est impossible. Donc $S=\varnothing$. [1]

Si $m=1$, alors le système devient :

$$\begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ -x-4z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ 3y-9z=15 \\ y-3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ y-3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=7-3(5+3z)+z \\ y=5+3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-8-8z \\ y=5+3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-4z \\ y=5+3z \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z=\gamma$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

$S=\left\{(-4-4\gamma;5+3\gamma;\gamma)\,\middle|\,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$ [3]

Autres possibilités :

$S=\left\{\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\beta;\beta;-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\beta\right)\,\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$S=\left\{\left(\alpha;2-\frac{3}{4}\alpha;-1-\frac{1}{4}\alpha\right)\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

Question 4 [2 + 3 + 1 + 3 + 3 = 12 points]

a. $M(x;y;z) \in (AB)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB},\ k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k-2 \\ y = 2k \\ z = 3k+1 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$ système d'équations paramétriques de (AB) [2]

b. $$(AB) \equiv \begin{cases} x = k-2 & (1) \\ y = 2k & (2) \\ z = 3k+1 & (3) \end{cases} \qquad \pi \equiv 4x - y - 4z + 2 = 0 \quad (4)$$

(1),(2),(3) $\rightarrow$ (4):

$4(k-2) - 2k - 4(3k+1) + 2 = 0 \Leftrightarrow 4k - 8 - 2k - 12k - 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ (5)

(5) $\rightarrow$ (1): $x = -3$

(5) $\rightarrow$ (2): $y = -2$

(5) $\rightarrow$ (3): $z = -2$

La droite (AB) perce le plan π au point $I(-3;-2;-2)$. [3]

c. *A, B* et *C* sont alignés

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \cdot 1 \\ 1 = k \cdot 2 \\ -3 = k \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = \frac{1}{2} \\ k = -1 \end{cases}$$ système impossible

Donc les points *A, B* et *C* ne sont pas alignés. [1]

d. $M(x;y;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (x+2) \cdot (-6-3) - y \cdot (-3+3) + (z-1) \cdot (1+2) = 0$

$\Leftrightarrow -9(x+2) + 3(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow -9x - 18 + 3z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - z + 7 = 0$ équation cartésienne du plan π' [3]

e. *d* est perpendiculaire à π' ssi le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, normal à π', est un vecteur directeur de *d*.

$M(x;y;z)\in d$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=k\cdot\vec{n},\ k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+3\\y-1\\z+2\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{z+2}{-1}\\ y-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x-3=3z+6\\ y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3z=-9\\ y=1\end{cases}$ système d'équations cartésiennes de *d* [3]

Question 5 [(2 + 2 + 4) + (2 + 3) = 13 points]

1. On tire simultanément 3 boules au hasard. Donc il y a C_{15}^3 cas possibles.

a. Événement *A* : les 3 boules ont la même couleur.
On tire donc 3 boules parmi les 7 boules rouges ou 3 boules parmi les 8 boules vertes ;
il y a $C_7^3+C_8^3$ cas favorables.

$P(A)=\dfrac{C_7^3+C_8^3}{C_{15}^3}=\dfrac{1}{5}=20\%$ [2]

b. Événement *B :* au moins une boule numérotée d'un nombre pair.

Événement contraire $\overline{B}$ *:* aucune boule numérotée d'un nombre pair, donc on tire 3 boules parmi les 8 boules numérotées d'un nombre impair ; il y a C_8^3 cas favorables.

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_8^3}{C_{15}^3}=\dfrac{57}{65}\approx 87{,}7\%$ [2]

c. Événement *C :* exactement une boule rouge et une boule numérotée d'un 6

Cas 1 : on tire la boule rouge numérotée d'un 6 et deux boules vertes qui ne sont pas numérotées d'un 6 ; il y a $C_1^1\cdot C_7^2$ cas favorables.

Cas 2 : on tire une boule rouge qui n'est pas numérotée d'un 6, la boule verte numérotée d'un 6 et un boule verte numérotée d'un autre chiffre ; il y $C_6^1\cdot C_1^1\cdot C_7^1$ cas favorables.

$P(C)=\dfrac{C_1^1\cdot C_7^2+C_6^1\cdot C_1^1\cdot C_7^1}{C_{15}^3}=\dfrac{9}{65}\approx 13{,}8\%$ [4]

2. On tire successivement trois boules au hasard avec remise. Il y a 15^3 cas possibles.

a. Événement D : on ne tire aucune boule verte.

On tire donc trois boules rouges ; il y a 7^3 cas favorables.

$$P(D)=\frac{7^3}{15^3}=\frac{343}{3375}\approx 10,2\%$$ [2]

b. Événement E : on tire exactement deux boules de même couleur.

Cas 1 : on tire une boule rouge et deux boules vertes ; il y a $3\cdot 7\cdot 8^2$ cas favorables.

Cas 2 : on tire une boule verte et deux boules rouges ; il y a $3\cdot 8\cdot 7^2$ cas favorables.

$$P(E)=\frac{3\cdot 7\cdot 8^2+3\cdot 8\cdot 7^2}{15^3}=\frac{56}{75}\approx 74,7\%$$ [3]

Alternative :

On considère l'événement contraire $\overline{E}$: on tire trois boules de la même couleur.

Question 6 [1 + 2 + 3 = 6 points]

a. Rangée de devant : $6!$ possibilités

Rangée de derrière : $8!$ possibilités

On peut faire $6!\cdot 8! = 29\,030\,400$ photos différentes. [1]

b. Rangée de devant : $\underbrace{5}_{\text{choix des deux places de Juliette et Claudia}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{choix des places de Juliette et Claudia parmi les deux places}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{choix des places des 4 autres filles}}$ possibilités

Rangée de derrière : $8!$ possibilités

On peut faire $5\cdot 2!\cdot 4!\cdot 8! = 9\,676\,800$ photos différentes dans ce cas. [2]

c. On considère l'événement contraire : « Leo et Pedro sont assis l'un à côté de l'autre ».

Rangée de devant : $6!$ possibilités

Rangée de derrière : $\underbrace{7}_{\text{choix des deux places de Leo et Pedro}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{choix des places de Leo et Pedro parmi les deux places}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{choix des places des 6 autres garçons}}$

On peut faire $7\cdot 2!\cdot 6!\cdot 6! = 7\,257\,600$ photos différentes avec Leo et Pedro assis l'un à côté de l'autre.

Donc on peut faire $29\,030\,400-7\,257\,600=21\,772\,800$ photos différentes où Leo et Pedro ne sont pas assis l'un à côté de l'autre. [3]

Alternative :

On commence pour la rangée de derrière par le choix de Leo (ou de Pedro).

Cas 1 : Leo choisit une des deux places au bord. Alors Pedro peut choisir parmi 6 places s'il ne veut pas être assis à côté de Leo. Finalement les autres garçons choisissent leur place parmi les 6 restantes. Ce sont $2\cdot 6\cdot 6!$ possibilités

Cas 2 : Leo choisit une des six places au milieu. Alors Pedro peut choisir parmi 5 places s'il ne veut pas être assis à côté de Leo. Finalement les autres garçons choisissent leur place parmi les 6 restantes. Ce sont $6\cdot 5\cdot 6!$ possibilités

Total des deux cas : $2\cdot 6\cdot 6! + 6\cdot 5\cdot 6!$ possibilités pour la rangée de derrière.

On peut donc faire $6!\cdot\left(2\cdot 6\cdot 6!+6\cdot 5\cdot 6!\right)=21\,772\,800$ photos différentes dans ce cas.