EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
CORRIGÉ							
Date :	05.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:00		*Durée :*	105 minutes
Discipline :	MATHE - STRUC	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG		
					Numéro du candidat :		

Question 1 **(12 points)**

Posons $P(z) = z^3 - 4(1-i)z^2 + (4+2i)z + 8(2i-9)$

Soit *bi* la racine imaginaire pure de P, (b un réel) **(0,5)**

$$\begin{aligned} P(bi) = 0 &\Leftrightarrow (bi)^3 - 4(1-i)(bi)^2 + (4+2i)(bi) + 8(2i-9) = 0 \\ &\Leftrightarrow -ib^3 + 4b^2(1-i) + 4bi - 2b + 16i - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow -ib^3 + 4b^2 - 4b^2 i + 4bi - 2b + 16i - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-b^3 - 4b^2 + 4b + 16)i + (4b^2 - 2b - 72) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 - 4b^2 + 4b + 16 = 0 & (1) \\ 4b^2 - 2b - 72 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

En résolvant (2), on obtient : $\Delta = 1156 = 34^2$, $b_1 = -4$, $b_2 = \frac{9}{2}$

$b_1 = -4$ dans (1) : $-(-4)^3 - 4 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 16 = 0$

$b_2 = \frac{9}{2}$ dans (1) : $-\left(\frac{9}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{9}{2} + 16 = -\frac{1105}{8} \neq 0$

Donc - *4i* est une racine de P. **(4)**

Schéma de Horner :

	1	$4i-4$	$2i+4$	$16i-72$
$-4i$		$-4i$	$16i$	$-16i+72$
	1	-4	$18i+4$	0

$P(z) = (z+4i)(z^2 - 4z + 18i + 4)$ **(2)**

$(E) \Leftrightarrow z = -4i$ ou $z^2 - 4z + 18i + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (18i+4) = -72i$

Racines carrées complexes de Δ (posons $u = x + yi$, x et y des réels) :

$$u^2 = -72i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 72 & (2) \\ 2xy = -72 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) : $2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = -6$

(2) - (1) : $2y^2 = 72 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = 6$ ou $y = -6$

D'après (3), x et y sont de signes contraires, donc les racines carrées complexes de Δ sont :

$u_1 = 6 - 6i$ et $u_2 = -6 + 6i$ **(4)**

on obtient : $z_1 = \frac{4+6-6i}{2} = 5 - 3i$; $z_2 = \frac{4-6+6i}{2} = -1 + 3i$ **(1)**

Finalement : $S = \{-4i ; 5-3i ; 3i-1\}$ **(0,5)**

Question 2 **(4 + 4 = 8 points)**

1) $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{3+3\sqrt{3}\,i} = \frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{3(1+\sqrt{3}\,i)} \cdot \frac{1-\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$

$= \dfrac{1-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}\,i+3i+\sqrt{3}+3}{3(1+3)}$

$= \dfrac{4+4i}{12} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$

Forme trigonométrique de z_1 :

$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ alors $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **(4)**

2) $z_2 = 9\,cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $z_3 = 16cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$Z = \frac{z_2}{z_3} = \frac{9cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{16cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{9}{16}cis\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{9}{16}cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Racines 4emes complexes de Z :

$$r_k = \sqrt[4]{\frac{9}{16}}\,cis\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cis\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad avec\ k \in \{0;1;2;3\}$$

Donc :

$$r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cis\left(\frac{\pi}{8}\right), r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cis\left(\frac{5\pi}{8}\right), r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cis\left(\frac{9\pi}{8}\right), r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cis\left(\frac{13\pi}{8}\right)$$

(4)

Question 3 **(4 + 3 + 2 = 9 points)**

$A\,(0\,;4\,;2\,)$, $B\,(\,-1\,;0\,;5\,)$, $C\,(\,-2\,;\,1\,;3\,)$ et $D\,(3\,;\,-4\,;\,-2\,)$

1) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2k \\ -4 = -3k \\ 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{4}{3} \\ k = 3 \end{cases}$ impossible

A, B et C ne sont pas alignés.

$$P(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ y-4 & -4 & -3 \\ z-2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-4+9) - (y-4)(-1+6) + (z-2)(3-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5y + 20 - 5z + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5y - 5z + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - z + 6 = 0$$

Équation cartésienne de π : $x - y - z + 6 = 0$ **(4)**

2) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π. La droite d est perpendiculaire à π donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d.

$$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = k \cdot \vec{n}\text{ , k réel}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = k \\ y+4 = -k \\ z+2 = -k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -z-2 \\ y+4 = z+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 1 \\ y-z = -2 \end{cases}$$

Système d'équations cartésiennes de d : $\begin{cases} x+z = 1 \\ y-z = -2 \end{cases}$ **(3)**

3) $P(x;y;z) \in d \cap \pi \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 1 \\ y-z = -2 \\ -x+y+z = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-z & (1) \\ y = z-2 & (2) \\ -x+y+z = 6 & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) dans (3), on obtient : $z-1+z-2+z = 6 \Leftrightarrow 3z = 9 \Leftrightarrow z = 3$

$z = 3$ dans (1) : $x = -2$
$z = 3$ dans (2) : $y = 1$
$P(-2;1;3)$ est le point d'intersection de la droite d avec le plan π. **(2)**

Question 4 **(5 + 4 + 4 = 13 points)**

1) Le système admet une solution unique

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1-2m & 3m-1 \\ -3 & 1-2m & m+1 \\ 7m & m+2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -m(m+2)(m+1) - 3(m+2)(3m-1) + 7m[(1-2m)(m+1) - (1-2m)(3m-1)] \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -m(m^2+3m+2) - 3(3m^2+5m-2) + 7m[-2m^2-m+1+6m^2-5m+1] \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -m^3-3m^2-2m-9m^2-15m+6+28m^3-42m^2+14m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 27m^3-54m^2-3m+6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 27m^2(m-2) - 3(m-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2) \neq 0 \;\; et \;\; 27m^2-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 2 \;\; et \;\; m^2 \neq \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow m \neq 2 \;\; et \;\; m \neq \frac{1}{3} \;\; et \;\; m \neq -\frac{1}{3}$$

Le système admet une solution unique $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{2\,; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\}$ **(5)**

2) Si $m = \frac{1}{3}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 2 & (1) \quad | \cdot 3 \\ -3x + \dfrac{y}{3} + \dfrac{4z}{3} = \dfrac{1}{3} & (2) \quad | \cdot 3 \\ \dfrac{7x}{3} + \dfrac{7y}{3} = 14 & (3) \quad | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 & (1') \\ -9x + y + 4z = 1 & (2') \quad |(1') - (2') \\ 7x + 7y = 42 & (3') \quad |7(1') - (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x & (1'') \\ 10x - 4z = 5 & (2'') \\ 0 = 0 & (3'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ z = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{5}{4} \\ 0x = 0 \end{cases}$$

Posons x = k, alors $S = \{(k; 6 - k; \frac{5k}{2} - \frac{5}{4}) | k \in \mathbb{R}\}$

ou $S = \{(6 - k; k; \frac{55}{4} - \frac{5k}{2}) | k \in \mathbb{R}\}$ ou $S = \{(\frac{2k}{5} + \frac{1}{2}; \frac{11}{2} - \frac{2k}{5}; k) | k \in \mathbb{R}\}$

Le système représente deux plans confondus coupés par un troisième plan selon la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées $\left(0; 6; -\frac{5}{4}\right)$. **(4)**

3) Si $m = 3$, on obtient :

$$\begin{cases} 3x - 5y + 8z = 2 \\ -3x - 5y + 4z = 3 \\ 21x + 5y = 14 \end{cases}$$

D = $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ -3 & -5 & 4 \\ 21 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 240,\quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 4 \\ 14 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -40 + 120 + 280 = 360$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -3 & 3 & 4 \\ 21 & 14 & 0 \end{vmatrix} = -168 - 336 - 336 = -840$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \\ 21 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -255 - 240 - 105 = -600$$

Alors : $x = \frac{360}{240} = \frac{3}{2} \qquad y = -\frac{840}{240} = -\frac{7}{2} \qquad z = -\frac{600}{240} = -\frac{5}{2}$

$$S = \{\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)\}$$

Le système représente trois plans différents qui se coupent en un seul point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. **(4)**

Question 5 **(5 + (1 + 1 + 1) + (1 + 1) + (2 + 3 + 3) = 18 points)**

1)

$$\left(2x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{16} = \sum_{n=0}^{16} C_{16}^n(-1)^n(2x^4)^{16-n}\left(\frac{1}{x^3}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{16} C_{16}^n(-1)^n 2^{16-n}(x^4)^{16-n}(x^{-3})^n$$
$$= \sum_{n=0}^{16} C_{16}^n(-1)^n 2^{16-n}x^{64-4n}x^{-3n}$$
$$= \sum_{n=0}^{16} C_{16}^n(-1)^n 2^{16-n}x^{64-7n}$$

$x^{64-7n}=x^8 \Leftrightarrow 64-7n=8 \Leftrightarrow n=8$

Terme en x^8 :

$C_{16}^8(-1)^8 2^{16-8}x^8 = 12870\cdot 1\cdot 256\cdot x^8 = 3294720x^8$ **(5)**

2) a) On peut former $7^5 = 16807$ jingles **(1)**

b) On peut former $7^4 \cdot 1 = 2401$ jingles **(1)**

c) On peut former $A_7^5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$ jingles **(1)**

3) nombre de cas possibles : 12

a) nombre de cas favorables : 8 (2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12)

p(E) = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ **(1)**

b) nombre de cas favorables : 2 (6 ; 12)

p(F) = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ **(1)**

4) nombre de cas possibles : $C_{20}^6 = 38760$

a) p(« deux rosiers de chaque couleur ») = $\frac{C_{10}^2\cdot C_7^2\cdot C_3^2}{C_{20}^6} = \frac{189}{2584} \approx 0{,}073$ **(2)**

b) p(« six rosiers de la même couleur ») = $\frac{C_{10}^6+C_7^6}{C_{20}^6} = \frac{217}{38760} \approx 0{,}006$ **(3)**

c) p(« au moins un rosier jaune ») = 1 – p(« aucun rosier jaune »)

= $1-\frac{C_{17}^6}{C_{20}^6} = \frac{194}{285} \approx 0{,}681$ **(3)**