

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES  
**Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**

|              |   |              |               |
|--------------|---|--------------|---------------|
| Date :       | 22.09.23                                    | Durée :      | 08:15 - 10:00 |
| Discipline : | Mathématiques -<br>Mathématiques-Structures | Section(s) : | CC / CC-4LANG |

I. Soit  $bi$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) une racine imaginaire pure de  $P$ . (0,5)

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (1 - 10i)(bi)^2 - (29 + 5i)(bi) + 6(1 + 5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3i - b^2 + 10b^2i - 29bi + 5b + 6 + 30i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + 10b^2 - 29b + 30 = 0 & (pi) \\ -b^2 + 5b + 6 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$$(pr) \Leftrightarrow b = -1 \vee b = 6.$$

$$\Delta = 49$$

Dans  $(pi)$ :  $-(-1)^3 + 10 \cdot (-1)^2 - 29 \cdot (-1) + 30 = 70 \neq 0$  et

$$-6^3 + 10 \cdot 6^2 - 29 \cdot 6 + 30 \stackrel{!}{=} 0.$$

$$z_0 = 6i.$$

(4)

Schéma de Horner :

|    |   |         |          |          |
|----|---|---------|----------|----------|
|    | 1 | 1 - 10i | -29 - 5i | 6 + 30i  |
| 6i |   | 6i      | 24 + 6i  | -6 - 30i |
|    | 1 | 1 - 4i  | -5 + i   | 0        |

$$P(z) = (z - 6i) \cdot [z^2 + (1 - 4i)z - (5 - i)] \quad (2)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 6i \vee z^2 + (1 - 4i)z - (5 - i) = 0.$$

$$\Delta = (1 - 4i)^2 + 4 \cdot (5 - i) = 5 - 12i. \quad (1)$$

Soit  $\delta = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) une racine carrée complexe de  $5 - 12i$ .

$$\text{Alors } \begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = -12 < 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x = \pm 3;$$

$$(1) - (2) \Rightarrow y = \pm 2;$$

de (3),  $x$  et  $y$  ont des signes contraires.

$$\delta = \pm (3 - 2i). \quad (3)$$

$$\text{Les solutions du trinôme du second degré sont } \frac{-1 + 4i \pm (3 - 2i)}{2} = \begin{cases} 1 + i \\ -2 + 3i \end{cases} \quad (1)$$

$$S = \{6i; 1 + i; -2 + 3i\} \quad (0,5)$$

II.

1)

$$\bullet |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= 2 \text{cis} \left( -\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\bullet |2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \text{cis} \left( -\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet i = \text{cis} \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

• Donc :

$$\begin{aligned}
 z &= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{[2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)]^{20}}{[2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)]^{10}} \\
 &= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2^{20} \text{cis}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{2^{10} \cdot 2^5 \text{cis}\left(-\frac{10\pi}{4}\right)} \\
 &= 2^5 \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{20\pi}{3} + \frac{5\pi}{2}\right) \\
 &= 32 \text{cis}\left(-\frac{11\pi}{3}\right) \\
 &= 32 \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 32 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
 &= 16 + 16i\sqrt{3} \quad \text{f.a. de } z
 \end{aligned}$$

(5)

2) Les racines cinquièmes de  $z$  sont :

$$\begin{aligned}
 z_k &= \sqrt[5]{32} \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right) \\
 &= 2 \text{cis}\left(\frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k \in \{0;1;2;3;4\}
 \end{aligned}$$

$$z_0 = 2 \text{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

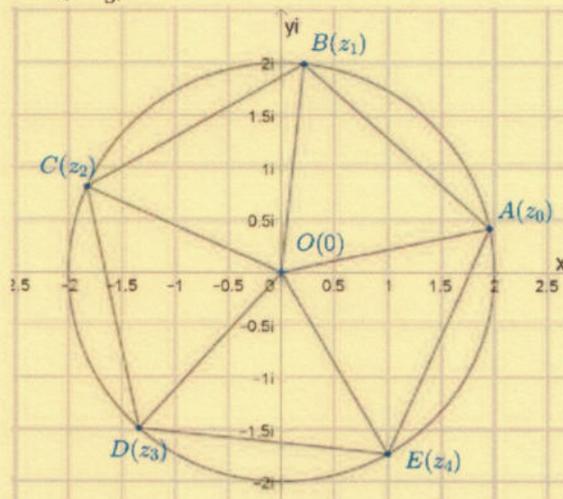
$$z_1 = 2 \text{cis}\left(\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$z_2 = 2 \text{cis}\left(\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$z_3 = 2 \text{cis}\left(\frac{19\pi}{15}\right) = 2 \text{cis}\left(-\frac{11\pi}{15}\right)$$

$$z_4 = 2 \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{15}\right) = 2 \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

(2)



(1)

III.

1)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & (m-3) \\ 1 & (2-m) & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & (2-m) \end{vmatrix} \\ &= -4 - m + 3 + 2 - m - 1 - 2 \cdot (2-m)(m-3) - 2 \\ &= 2m^2 - 12m + 10 \\ &= 2(m^2 - 6m + 5) \\ &= 2(m-1)(m-5) \end{aligned}$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 5$$

Le système admet une solution unique si et seulement si  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$ .

(3)

2)

- Si  $m = 1$ ,  $\det A = 0$  et le système n'admet pas de solution unique.

$$\begin{aligned} (s) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -3y + 5z = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2)/(1) - 2 \cdot (2)$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons  $y = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\text{De (2)} : z = \frac{3}{5}\alpha - \frac{7}{5}$$

$$\text{Dans (1)} : 2x = \alpha - \frac{3}{5}\alpha + \frac{7}{5} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}; \alpha; \frac{3}{5}\alpha - \frac{7}{5} \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(S = \{ (\alpha; 5\alpha - 1; 3\alpha - 2) / \alpha \in \mathbb{R} \})$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\alpha + \frac{7}{3}; \alpha \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace

se coupant suivant une droite passant par le point  $A\left(\frac{1}{5}; 0; -\frac{7}{5}\right)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

colinéaire à  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

(5)

- Si  $m = 5$ ,  $\det A = 0$  et le système n'admet pas de solution unique.

$$\begin{aligned} (s) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -3y - 3z = -7 \\ 5y + 5z = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -3y - 3z = -7 \\ 0 = -56 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2)/(1) - 2 \cdot (2)$$

$$(3)/(1) - 2 \cdot (3)$$

$$(3)/5 - (2) + 3 \cdot (3)$$

La dernière équation étant impossible, le système est impossible.

$$S = \emptyset$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace n'ayant aucun point en commun.

(4)

IV.

1)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$   
 $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \begin{cases} -2 = k \cdot 1 \\ -2 = k \cdot (-1) \\ -10 = k \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \\ k = 10 \end{cases} \text{ impossible}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont pas alignés. (1)

$$M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+2 & -1 & -2 \\ z-3 & -1 & -10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y+2 & -1 \\ z-3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10(x-1) - 2(z-3) + 2(y+2) - 2(z-3) - 2(x-1) + 10(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x-1) + 12(y+2) - 4(z-3) = 0 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + 3(y+2) - (z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y - z + 7 = 0$$

$$\pi \equiv 2x + 3y - z + 7 = 0 \text{ (équation cartésienne de } \pi) \quad (3)$$

2)  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\pi$ , donc un vecteur directeur de  $d$ .

Un système d'équations paramétriques de  $d$  est donc :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases} \text{ avec } (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

3) Les plans  $\pi$  et  $\pi'$  sont parallèles, donc  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  est aussi un vecteur normal à  $\pi'$ .

$$M(x; y; z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot 2 + (y-5) \cdot 3 + (z+4) \cdot (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y - z - 21 = 0$$

$$\pi' \equiv 2x + 3y - z - 21 = 0 \quad (2)$$

4)

$$M(x; y; z) \in d \cap \pi' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 2x + 3y - z - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 4\alpha + 2 + 9\alpha - 6 + \alpha - 3 - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 14\alpha = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$d \text{ perce le plan } \pi' \text{ au point } I(5; 4; 1). \quad (2)$$

V.

1)

$$\begin{aligned}
 3x^2 \cdot \left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10} &= 3x^2 \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (-1)^k \cdot (x^3)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 3x^2 \cdot (-1)^k \cdot x^{30-3k} \cdot 2^k \cdot x^{-2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{10} 3 \cdot C_{10}^k \cdot (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^{32-5k}
 \end{aligned}$$

$$x^{32-5k} = x^7 \Leftrightarrow 32 - 5k = 7$$

$$\Leftrightarrow 5k = 25$$

$$\Leftrightarrow k = 5$$

Terme en  $x^7$  :

$$\begin{aligned}
 3 \cdot C_{10}^5 (-1)^5 \cdot 2^5 \cdot x^{32-5 \cdot 5} &= 3 \cdot 252 \cdot (-1) \cdot 32 \cdot x^7 \\
 &= -24192x^7
 \end{aligned}$$

(5)

2) Dans l'armoire se trouvent 20 chaussures. L'ordre importe.

a) Il y a

$$\begin{array}{cccc}
 \underbrace{A_{10}^1} & \cdot & \underbrace{A_{10}^1} & + & \underbrace{A_{10}^1} & \cdot & \underbrace{A_{10}^1} \\
 \text{Nombre de choix} & & \text{Nombre de choix} & & \text{Nombre de choix} & & \text{Nombre de choix} \\
 \text{d'une chaussure} & & \text{d'une chaussure} & & \text{d'une chaussure} & & \text{d'une chaussure} \\
 \text{droite parmi 10} & & \text{gauche parmi 10} & & \text{gauche parmi 10} & & \text{droite parmi 10}
 \end{array}$$

$$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200 \text{ choix amenant une chaussure gauche et une chaussure droite.}$$

(1)

b) Il y a

$$2 \cdot (A_5^1 \cdot A_5^1 + A_3^1 \cdot A_3^1 + A_2^1 \cdot A_2^1) = 2 \cdot (5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 76 \text{ choix amenant une chaussure gauche et une chaussure droite de même couleur.}$$

(2)

c) Il y a 20 choix qui amènent deux chaussures de la même paire. Puisqu'il y a  $A_{20}^2 = 380$  choix possibles, il reste  $380 - 20 = 360$  choix amenant deux chaussures qui ne sont pas de la même paire.

ou bien

Il y a 20 choix possibles pour tirer une première chaussure. Parmi les 19 chaussures restantes, il y a une chaussure de la même paire que la première chaussure tirée et 18 chaussures d'une autre paire. Il y a donc  $20 \cdot 18 = 360$  choix amenant deux chaussures qui ne sont pas de la même paire.

(2)

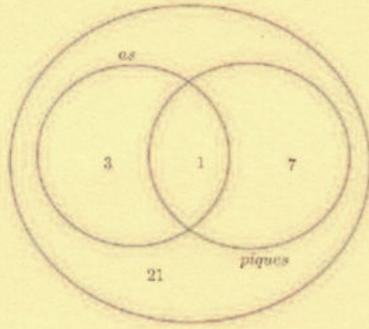
3) L'ordre n'importe pas. Il y a  $C_{32}^5 = 201.376$  mains possibles.

a) Arranger les 4 couleurs 1 à 1, combiner les 8 cartes à couleur choisies 3 à 3 et les 24 cartes restantes 2 à 2. Il y a  $A_4^1 \cdot C_8^3 \cdot C_{24}^2 = 4 \cdot 56 \cdot 276 = 61.824$  mains contenant exactement trois cartes de la même couleur.

$$P(\text{"3 cartes de la même couleur"}) = \frac{61.824}{201.376} = \frac{276}{899} \approx 30,70\%$$

(2)

b)



Choisir l'as de pique, combiner 7 cartes piques restantes 2 à 2 et les 21 cartes restantes 2 à 2 ou bien

combiner 3 as (non pique) 1 à 1, combiner 7 cartes piques (non as) 3 à 3 et les 21 cartes restantes 1 à 1.

$$\text{Il y a } C_1^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{21}^2 + C_3^1 \cdot C_7^3 \cdot C_{21}^1$$

$$= 1 \cdot 21 \cdot 210 + 3 \cdot 35 \cdot 21 = 6.615 \text{ mains contenant exactement un as et trois piques.}$$

$$P(\text{"1 as et 3 piques"}) = \frac{6.615}{201.376} = \frac{945}{28.768} \approx 3,28\% \quad (3)$$

c) Combiner 4 as 2 à 2, 4 rois 2 à 2 et les 24 cartes restantes 1 à 1

ou bien

combiner 4 as 3 à 3 et 4 rois 2 à 2

ou bien

combiner 4 as 2 à 2 et 4 rois 3 à 3.

$$\text{Il y a } C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^1 + C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^0 + C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_{24}^0 = 6 \cdot 6 \cdot 24 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 912 \text{ mains contenant au moins deux as et au moins deux rois.}$$

$$P(\text{"au moins 2 as et au moins 2 rois"}) = \frac{912}{201.376} = \frac{57}{12.586} \approx 0,45\% \quad (3)$$