

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	06.06.23	Durée :	08:15 - 10:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	Section(s) :	CC / CC-4LANG

Question 1

(21p)

1)
$$\underbrace{3z^3 + (2 + 6i)z^2 - (32 - 49i)z - 45 + 65i}_{=P(z)} = 0$$

(10p)

L'équation admet une solution réelle. Il existe donc un réel a tel que $P(a) = 0$.

Or :

$$\begin{aligned} P(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a^3 + (2 + 6i)a^2 - (32 - 49i)a - 45 + 65i &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a^3 + 2a^2 + 6ia^2 - 32a + 49ia - 45 + 65i &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a^3 + 2a^2 - 32a - 45) + (6a^2 + 49a + 65)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^3 + 2a^2 - 32a - 45 = 0 & (1) \\ 6a^2 + 49a + 65 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

(1p)

De (2) : $6a^2 + 49a + 65 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{13}{2}$ ou $a = -\frac{5}{3}$ ($\Delta = 841$).

$a = -\frac{13}{2}$ dans (1) : $-\frac{4611}{8} \neq 0$.

$a = -\frac{5}{3}$ dans (1) : $0 \stackrel{!}{=} 0$.

(1p)

Donc $-\frac{5}{3}$ est la solution réelle cherchée.

Avec le schéma de HORNER :

	3	2 + 6i	-32 + 49i	-45 + 65i
$-\frac{5}{3}$		-5	5 - 10i	45 - 65i
	3	-3 + 6i	-27 + 39i	0

Donc :

$$\begin{aligned} P(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{5}{3}\right) [3z^2 + (-3 + 6i)z - 27 + 39i] &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \left(z + \frac{5}{3}\right) \underbrace{[z^2 + (-1 + 2i)z - 9 + 13i]}_{=P_1(z)} &= 0 \end{aligned}$$

(2p)

Cherchons les racines de P_1 : $P_1(z) = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + (-1 + 2i)z - 9 + 13i = 0$$

$$\Delta_{P_1} = (-1 + 2i)^2 - 4(-9 + 13i)$$

$$= 33 - 56i$$

(1p)

Soit $u = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) une racine carrée complexe de Δ_{P_1} , alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 & (3) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65 & (4) \\ 2xy = -56 & (5) \end{cases}$$

Avec (3) + (4) : $2x^2 = 98 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7$

Avec (4) - (3) : $2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

De (5) on sait que x et y sont de signes contraires.

Donc $u_1 = 7 - 4i$ et $u_2 = -7 + 4i$.

(4p)

Finalement :

$$z_1 = \frac{-(-1+2i)+7-4i}{2} = 4 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-(-1+2i)-7+4i}{2} = -3 + i$$

$$S = \left\{ 4 - 3i; -3 + i, -\frac{5}{3} \right\}$$

(1p)

2) $\forall z \in \mathbb{C} : [10 - 5i - (6 - 8i)\bar{z}](2z^4 - 18) = 0$

(4p)

$$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\bar{z}]2(z^2 - 3)(z^2 + 3) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\bar{z}](z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z^2 - 3i^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\bar{z}](z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } z + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } z - \sqrt{3}i = 0 \text{ ou } z + \sqrt{3}i = 0 \text{ ou } \bar{z} = \frac{10 - 5i}{6 - 8i}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} \text{ ou } z = \sqrt{3}i \text{ ou } z = -\sqrt{3}i = 0 \text{ ou } \bar{z} = 1 + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} \text{ ou } z = \sqrt{3}i \text{ ou } z = -\sqrt{3}i = 0 \text{ ou } z = 1 - \frac{1}{2}i$$

$$S = \left\{ \sqrt{3}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}i; -\sqrt{3}i; 1 - \frac{1}{2}i \right\}$$

3) $z_1 = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \cdot i$ et $z_2 = -108 \cdot i \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

(7p)

a) * $z_1 = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \cdot i$

(4p)

$$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{6})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1) : \begin{cases} \cos \varphi_{z_1} = \frac{-2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi_{z_1} = \frac{-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme $\cos \varphi_{z_1} < 0$ et $\sin \varphi_{z_1} < 0$, on sait que φ_{z_1} appartient au troisième quadrant.

$$\Rightarrow \varphi_{z_1} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } z_1 = 4\sqrt{2} \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \quad (\text{ou bien } z_1 = 4\sqrt{2} \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right))$$

(2p)

* $z_2 = -108i \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = (-i) \cdot 108 \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 108 \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 108 \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (0,5p)

$$Z = \frac{(z_1)^2}{z_2} = \frac{(4\sqrt{2} \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right))^2}{108 \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{32 \text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)}{108 \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{8 \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{27 \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{8}{27} \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right).$$

(1,5p)

b) Soit $u^3 = Z$, alors $u = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \text{cis}\left(\frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, avec $k \in \{0; 1; 2\}$.

(3p)

• pour $k = 0$:

$$u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{-5\pi}{36}\right)$$

• pour $k = 1$:

$$u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{19\pi}{36}\right)$$

• pour $k = 2$:

$$u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{43\pi}{36}\right)$$

Question 2
(12p)

1) Le système admet une solution unique

(4p)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & -m-4 \\ 4m+7 & -2m-4 & -4m-8 \\ 13 & 2m & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m(-2m-4) + 13(-4m-8) + 2m(4m+7)(-m-4)$$

$$\quad - 13(-2m-4)(-m-4) - 4(4m+7) - 2m^2(-4m-8) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -8m^2 - 16m - 52m - 104 - 8m^3 - 32m^2 - 14m^2 - 56m$$

$$\quad - 26m^2 - 104m - 52m - 208 - 16m - 28 + 8m^3 + 16m^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -64m^2 - 296m - 340 \neq 0 \Leftrightarrow 16m^2 + 74m + 85 \neq 0 (\Delta = 36)$$

$$\Leftrightarrow m \neq -\frac{5}{2} \text{ et } m \neq -\frac{17}{8}$$

 Le système admet une solution unique $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{17}{8} \right\}$.

 2) pour $m = -\frac{5}{2}$, le système devient :

(4p)

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}x + y - \frac{3}{2}z = -\frac{5}{2} & (1) \\ -3x + y + 2z = 2 & (2) \\ 13x - 5y + 4z = 8 & (3) \end{cases}$$

En remplaçant (3) par (3) + (2) + 4 · (1) on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}x + y - \frac{3}{2}z = -\frac{5}{2} \\ -3x + y + 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Le système est simplement indéterminé.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x + y - \frac{3}{2}z = -\frac{5}{2} & (1) \\ -3x + y + 2z = 2 & (2) \end{cases}$$

 De (1) on obtient : $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$ (4).

 (4) dans (2) : $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}z = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 7z - 9$ (5)

 (5) dans (4) : $y = 19z - 25$

$$S = \{(7\gamma - 9; 19\gamma - 25, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$$

 I.G. : Le système représente 3 plans différents qui se coupent selon une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$ et qui passe par le point $P(-9; -25; 0)$.

 (Autres possibilités : $S = \{(\alpha; \frac{19}{7}\alpha - \frac{4}{7}; \frac{1}{7}\alpha + \frac{9}{7}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $S = \{(\frac{7}{19}\beta + \frac{4}{19}; \beta; \frac{1}{19}\beta + \frac{25}{19}) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$)

 3) pour $m = -1$, le système devient :

(4p)

$$\begin{cases} -x + y - 3z = -1 & (1) \\ 3x - 2y - 4z = 2 & (2) \\ 13x - 2y + 4z = 8 & (3) \end{cases}$$

 De (1) on obtient : $x = y - 3z + 1$ (4).

 (4) dans (2) : $y = 13z - 1$ (5).

 (4) dans (3) : $11y - 35z = -5$ (6).

 (5) dans (6) : $108z = 6 \Leftrightarrow z = \frac{1}{18}$.

 $z = \frac{1}{18}$ dans (5) : $y = -\frac{5}{18}$.

 $z = \frac{1}{18}$ et $y = -\frac{5}{18}$ dans (4) : $x = \frac{5}{9}$.

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{9}; -\frac{5}{18}; \frac{1}{18} \right) \right\}$$

 I.G. : Le système représente 3 plans qui se coupent en un seul point de coordonnées $Q \left(\frac{5}{9}; -\frac{5}{18}; \frac{1}{18} \right)$.

Question 3

(10p)

1) $d \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 2z - 1 = 0 & (1) \\ -x + 2y - 5z + 2 = 0 & (2) \end{cases}$ **(4p)**
 Avec (2) : $x = 2y - 5z + 2$ (3).

(3) dans (1) : $-4y - 8z + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2z + \frac{3}{4}$ (4).

(4) dans (3) : $x = -9z + \frac{7}{2}$.

En posant $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ on obtient le système d'équations paramétriques suivant :

$$d \equiv \begin{cases} x = -9\gamma + \frac{7}{2} \\ y = -2\gamma + \frac{3}{4} \\ z = \gamma \end{cases} \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

(Autres possibilités :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{2}{9}\alpha - \frac{1}{36} \\ z = -\frac{1}{9}\alpha + \frac{7}{18} \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}; \text{ et } d \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2}\beta + \frac{1}{8} \\ y = \beta \\ z = -\frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8} \end{cases} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}.)$$

2) Le plan Π est perpendiculaire à d et $A(-1; 4; 2) \in \Pi$. **(3p)**

* Comme $\Pi \perp d$: un vecteur directeur de d est un vecteur normal à Π . De la première partie de l'exercice, on sait que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

\vec{u} est un vecteur normal à $\Pi \Leftrightarrow \Pi \equiv -9x - 2y + z + d = 0$.

* $A(-1; 4; 2) \in \Pi \Leftrightarrow 9 - 8 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$.

Finalement une équation cartésienne de Π est : $\Pi \equiv -9x - 2y + z - 3 = 0$.

3) En posant $x = \alpha$ et $y = \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on obtient le système d'équations paramétriques suivant : **(3p)**

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 9\alpha + 2\beta + 3 \end{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de Π et le point $M(0; 0; 3) \in \Pi$.

Question 4
(17p)

$$1) \left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^8 \quad (5p)$$

$$= \sum_{i=0}^8 (-1)^i \cdot C_8^i \cdot (2x^3)^{8-i} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^8 (-1)^i \cdot C_8^i \cdot 2^{8-i} \cdot x^{24-3i} \cdot 3^i \cdot x^{-2i}$$

$$= \sum_{i=0}^8 (-1)^i \cdot C_8^i \cdot 2^{8-i} \cdot 3^i \cdot x^{24-5i}$$

Comme on cherche le terme en x^{-11} , il faut que $24 - 5i = -11 \Leftrightarrow i = 7$. Le terme en x^{-11} est donc égal à : $(-1)^7 \cdot C_8^7 \cdot 2^{8-7} \cdot 3^7 \cdot x^{-11} = -34\,992x^{-11}$.

$$2) \text{ Nombre de mains possibles : } C_{52}^7 = 133\,784\,560. \quad (6p)$$

$$a) \text{ Nombre de mains favorables : } \underbrace{C_4^4}_{4 \text{ valets}} \cdot \underbrace{C_{48}^3}_{3 \text{ autres cartes}} = 17\,296. \quad (1p)$$

$$P(\ll \text{tirer les quatre valets} \gg) = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^3}{C_{52}^7} = \frac{1}{7\,735} \approx 0,000\,13$$

$$b) P(\ll \text{tirer au moins un carreau} \gg) = 1 - P(\ll \text{ne tirer aucun carreau} \gg) \quad (2p)$$

$$= 1 - \frac{C_{39}^7}{C_{52}^7} = 1 - \frac{15\,380\,937}{133\,784\,560} = \frac{535\,763}{605\,360} \approx 0,885$$

c) Nombre de mains favorables :

$$\underbrace{C_{12}^3}_{3 \text{ trèfles, sans le roi}} \cdot \underbrace{C_3^2}_{2 \text{ rois, pas de trèfles}} \cdot \underbrace{C_{36}^2}_{2 \text{ autres cartes}}$$

$$+ \underbrace{C_1^1}_{\text{le roi de trèfle}} \cdot \underbrace{C_3^1}_{1 \text{ rois, pas de trèfles}} \cdot \underbrace{C_{12}^2}_{2 \text{ trèfles, sans le roi}} \cdot \underbrace{C_{36}^3}_{3 \text{ autres cartes}}$$

$$= 1\,829\,520.$$

$$P(\ll \text{tirer exactement trois trèfles et deux rois} \gg) = \frac{1\,829\,520}{133\,784\,560} = \frac{3267}{238901} \approx 0,014 \quad (3p)$$

$$3) \quad (6p)$$

a) Le mot commence par une consonne :

$$\underbrace{C_{21}^1}_{\text{la première lettre est une consonne}} \cdot \underbrace{C_{20}^3}_{3 \text{ consonnes parmi celles qui restent}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{3 \text{ voyelles}} \cdot \underbrace{P_6}_{\text{ordre des 3 consonnes et 3 voyelles}}$$

$$= 172\,368\,000 \text{ possibilités.} \quad (2p)$$

b) Le mot contient la lettre A :

$$\underbrace{C_1^1}_{\text{lettre A}} \cdot \underbrace{C_{21}^4}_{4 \text{ consonnes}} \cdot \underbrace{C_4^2}_{2 \text{ autres voyelles}} \cdot \underbrace{P_6}_{\text{possibilités de distribuer les 4 consonnes et 2 voyelles}} \cdot \underbrace{A_7^1}_{\text{position de la lettre A}}$$

$$= 180\,986\,400 \text{ possibilités.} \quad (2p)$$

$$c) \underbrace{C_{21}^4}_{4 \text{ consonnes}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{3 \text{ voyelles}} \cdot \underbrace{P_4}_{\text{ordre des 4 consonnes}} \cdot \underbrace{P_3}_{\text{ordre des 3 voyelles}}$$

$$= 8\,618\,400 \text{ possibilités.} \quad (2p)$$

