



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CC	Date de l'épreuve :	15.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

Question 1 (au choix)

(12p)

$$\underbrace{3z^3 + (3 - 11i)z^2 + (18 + 25i)z + 18 - 16i}_{=P(z)} = 0$$

L'équation admet une solution imaginaire pure. Il existe donc un réel b t.q. $P(bi) = 0$.

Or : $P(bi) = 0$

$$\Leftrightarrow 3(bi)^3 + (3 - 11i)(bi)^2 + (18 + 25i)bi + 18 - 16i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3b^3i - 3b^2 + 11b^2i + 18bi - 25b + 18 - 16i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3b^2 - 25b + 18) + (-3b^3 + 11b^2 + 18b - 16)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b^2 - 25b + 18 = 0 & (1) \\ -3b^3 + 11b^2 + 18b - 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad (2p)$$

De (1) : $-3b^2 - 25b + 18 = 0 \Leftrightarrow b_1 = -9, b_2 = \frac{2}{3} \quad (\Delta = 841)$.

$b_1 = -9$ dans (2) : $2900 \neq 0$ donc $-9i \notin \mathcal{S}$. (1p)

$b_2 = \frac{2}{3}$ dans (2) : $0 \stackrel{!}{=} 0$ donc $\frac{2}{3}i \in \mathcal{S}$.

Avec le schéma de HORNER :

3	3 - 11i	18 + 25i	18 - 16i
$\frac{2}{3}i$	2i	6 + 2i	-18 + 16i
3	3 - 9i	24 + 27i	0

Donc :

$$P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{2}{3}i\right) [3z^2 + (3 - 9i)z + 24 + 27i] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(z - \frac{2}{3}i\right) \underbrace{[z^2 + (1 - 3i)z + 8 + 9i]}_{=P_1(z)} = 0 \quad (3p)$$

Cherchons les racines de P_1 : $P_1(z) = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + (1 - 3i)z + 8 + 9i = 0$$

$$\Delta_{P_1} = (1 - 3i)^2 - 4(8 + 9i)$$

$$= -40 - 42i \quad (1p)$$

Soit $u = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) une racine carrée complexe de Δ_{P_1} , alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -40 & (3) \\ x^2 + y^2 = 58 & (4) \\ 2xy = -42 & (5) \end{cases}$$

Avec (3) + (4) : $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Avec (4) - (3) : $2y^2 = 98 \Leftrightarrow y^2 = 49 \Leftrightarrow y = \pm 7$

De (5) on sait que x et y sont de signes contraires.

Donc $u_1 = 3 - 7i$ et $u_2 = -3 + 7i$. (4p)

Finalement :

$$z_1 = \frac{-(1-3i)+3-7i}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-(1-3i)-3+7i}{2} = -2 + 5i$$

$$S = \left\{ 1 - 2i; -2 + 5i, \frac{2}{3}i \right\} \quad (1p)$$

Question 2 (au choix) (12p)

a) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 24z^2 + 400 = 0$ (9p)

Posons : $t = z^2$, avec $t \in \mathbb{C}$. On obtient : $(E') \equiv t^2 + 24t + 400 = 0$. (0,5p)

$$\Delta_{(E')} = -1024 = (32i)^2$$

Donc $t = \frac{-24 + 32i}{2} = -12 + 16i$ ou $t = \frac{-24 - 32i}{2} = -12 - 16i$. (2p)

Revenons vers z :

* $z_1^2 = -12 + 16i$. Soit $z_1 = a_1 + b_1i$, ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$), alors :

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = -12 & (1) \\ a_1^2 + b_1^2 = 20 & (2) \\ 2a_1b_1 = 16 & (3) \end{cases}$$

Avec (1) + (2) : $2a_1^2 = 8 \Leftrightarrow a_1^2 = 4 \Leftrightarrow a_1 = \pm 2$

Avec (2) - (1) : $2b_1^2 = 32 \Leftrightarrow b_1^2 = 16 \Leftrightarrow b_1 = \pm 4$

De (3) on sait que a_1 et b_1 sont de mêmes signes.

Donc $z_1 = 2 + 4i$ ou $z_1 = -2 - 4i$. (4p)

* $z_2^2 = -12 - 16i$. Soit $z_2 = a_2 + b_2i$, ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$), alors :

$$\begin{cases} a_2^2 - b_2^2 = -12 & (1') \\ a_2^2 + b_2^2 = 20 & (2') \\ 2a_2b_2 = -16 & (3') \end{cases}$$

Avec (1') + (2') : $2a_2^2 = 8 \Leftrightarrow a_2^2 = 4 \Leftrightarrow a_2 = \pm 2$

Avec (2') - (1') : $2b_2^2 = 32 \Leftrightarrow b_2^2 = 16 \Leftrightarrow b_2 = \pm 4$

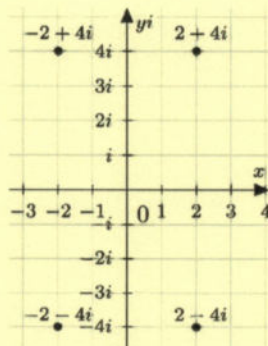
De (3') on sait que a_2 et b_2 sont de signes contraires.

Donc $z_2 = 2 - 4i$ ou $z_2 = -2 + 4i$. (2p)

Finalement : $S = \{2 + 4i; -2 - 4i; -2 + 4i; 2 - 4i\}$ (0,5p)

- b) $(2 + 4i)(2 - 4i)(-2 + 4i)(-2 - 4i) = (4 + 16)(4 + 16) = 400$
 ou bien : Le produit des racines de $P(z)$ est le terme constant de $P(z)$, donc 400. (1p)

- c) (2p)



Question 3 (11p)

- 1) $\forall z \in \mathbb{C} : (z^4 - 4)[4i - 2 + (3 - i)\bar{z}] = 0$ (4p)

$$\Leftrightarrow (z^2 - 2)(z^2 + 2)[4i - 2 + (3 - i)\bar{z}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})(z^2 - 2i^2)[4i - 2 + (3 - i)\bar{z}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)[4i - 2 + (3 - i)\bar{z}] = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } z + \sqrt{2} = 0 \text{ ou } z - \sqrt{2}i = 0 \text{ ou } z + \sqrt{2}i = 0 \text{ ou } \bar{z} = \frac{2 - 4i}{3 - i}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \text{ ou } z = -\sqrt{2} \text{ ou } z = \sqrt{2}i \text{ ou } z = -\sqrt{2}i = 0 \text{ ou } \bar{z} = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \text{ ou } z = -\sqrt{2} \text{ ou } z = \sqrt{2}i \text{ ou } z = -\sqrt{2}i = 0 \text{ ou } z = 1 + i$$

$$S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}i; -\sqrt{2}i; 1 + i\}$$

- 2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}, z_2 = \frac{3}{2} \text{cis}(-\frac{3\pi}{4})$.

a) $Z = \frac{(z_1)^2}{z_2}$ (4p)

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$
 (1p)

$$\arg(z_1) : \begin{cases} \cos \varphi_{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi_{z_1} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_{z_1} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
 (2p)

$$z_1 = \frac{2}{3} \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Donc } Z = \frac{\left(\frac{2}{3} \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}{\frac{3}{2} \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{8}{27} \text{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
 (1p)

- b) Soit $u^3 = Z$, alors $u = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \text{cis}\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, avec $k \in \{0; 1; 2\}$. (3p)

• pour $k = 0$: $u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{5\pi}{36}\right)$	• pour $k = 1$: $u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{29\pi}{36}\right)$	• pour $k = 2$: $u = \frac{2}{3} \text{cis}\left(\frac{53\pi}{36}\right)$
--	---	---

Question 4

(8p)

1) Le système admet une solution unique

(4p)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-m & -3 & 2 \\ -2-m & 1 & -2 \\ -4 & -2m-1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 4m - 24 \neq 0 \quad (\Delta = 784 = 28^2)$$

$$\Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2} \text{ et } m \neq 2$$

2)

(4p)

Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x - 3y + 2z = 1 & (1) \\ -\frac{1}{2}x + y - 2z = -3 & (2) \\ -4x + 2y + 2z = 6 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) : $3x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}$ (4)

(2) + (3) : $-\frac{9}{2}x + 3y = 3$ (5)

(4) dans (5) : $0 = 0$ ce qui est toujours vrai. Le système est simplement indéterminé.

(4) dans (1) : $-\frac{2}{3}y + 2z = \frac{10}{3} \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$

(5) : $y = \frac{3}{2}x + 1$.

$S = \left\{ \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}; \beta; \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3} \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$ **(3p)**

I.G. : Les trois équations sont celles de trois plans qui se coupent selon la droite de vecteur

directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et passant par le point $P(-\frac{2}{3}; 0; \frac{5}{3})$. **(1p)**

Autres possibilités :

$S = \left\{ \left(\alpha; \frac{3}{2}\alpha + 1; \frac{1}{2}\alpha + 2 \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}; \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $P(0; 1; 2)$.

$S = \left\{ (2\gamma - 4; 3\gamma - 5; \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\}; \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P(-4; -5; 0)$.

Question 5

(10p)

1) $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π .

(3p)

$d \perp \Pi$ donc \vec{n} est un vecteur directeur de d .

Soit $M(x; y) \in d$. Avec $A \in d$, \vec{n} est un vecteur directeur de d

$\Leftrightarrow \vec{AM} \text{ colli } \vec{u}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha \cdot \vec{u} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 3\alpha \\ y - 7 = \alpha \\ z - 6 = -5\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

On obtient comme système d'équations paramétriques de d :

$d \equiv \begin{cases} x = 3\alpha - 3 \\ y = \alpha + 7 \\ z = -5\alpha + 6 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

En substituant $\alpha = y - 7$, on obtient un système d'équations cartésiennes :

$d \equiv \begin{cases} x = 3y - 24 \\ z = -5y + 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 24 = 0 \\ 5y + z - 41 = 0 \end{cases}$
(troisième équation : $5x + 3z - 3 = 0$)

2)

(3p)

$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{3}\beta - \frac{3}{5} \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de Π et $M(0; 0; -\frac{3}{5}) \in \Pi$.

autres solutions :

$\Pi \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma + 1 \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M(1; 0; 0).$

ou bien :

$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3\alpha + 5\gamma + 3 \\ z = \gamma \end{cases} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}. \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M(0; 3; 0).$

3)

(4p)

$\Pi \cap d = \{B(x_B; y_B; z_B)\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_B + y_B - 5z_B - 3 = 0 & (1) \\ x_B = 3y_B - 24 & (2) \\ z_B = -5y_B + 41 & (3) \end{cases}$

(3) et (2) dans (1) : $9y_B - 72 + y_B + 25y_B - 205 - 3 = 0 \Leftrightarrow 35y_B = 280 \Leftrightarrow y_B = 8$.

$y_B = 8$ dans (2) : $x_B = 24 - 24 = 0$.

$y_B = 8$ dans (3) : $z_B = -40 + 41 = 1$. $\mathcal{S} = \{(0; 8; 1)\}$. Donc $B(0; 8; 1)$.

Question 6
(13p)

 1) Tirage successif sans remise de 3 boules parmi 12 : $\#\Omega = A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 1\,320$.

$$a. \#A = \underbrace{A_3^3}_{\text{position}} \cdot \underbrace{A_3^1}_{\text{boule rouge}} \cdot \underbrace{A_5^1}_{\text{boule bleue}} \cdot \underbrace{A_4^1}_{\text{boule jaune}} = 360. \quad (2p)$$

$$P(A) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11} \approx 0,27.$$

$$b. \#B = \underbrace{A_3^3}_{\text{3 boules rouges}} + \underbrace{A_5^3}_{\text{3 boules bleues}} + \underbrace{A_4^3}_{\text{3 boules jaunes}} = 90. \quad (2p)$$

$$P(B) = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44} \approx 0,07.$$

 c. \overline{C} : « Ne tirer aucune boule jaune. »

$$\#\overline{C} = A_8^3 = 336. \quad (2p)$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{336}{1320} = \frac{41}{55} \approx 0,75.$$

$$d. \#D = \underbrace{A_8^2}_{\text{2 boules non jaunes}} \cdot \underbrace{A_4^1}_{\text{boule jaune}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Position de la boule jaune}} = 224. \quad (2p)$$

$$P(D) = \frac{224}{1320} = \frac{28}{165} \approx 0,17.$$

 2) Tirage successif avec remise de 3 boules parmi 12 : $\#\Omega = B_{12}^3 = 12^3 = 1\,728$.

$$a. \#E = \underbrace{B_7^3}_{\text{boules non bleues}} = 7^3 = 343. \quad (2p)$$

$$P(E) = \frac{343}{1728} \approx 0,2.$$

$$b. \#F = 3 \cdot \left(\underbrace{B_3^2}_{\text{2 boules rouges}} \cdot \underbrace{B_9^1}_{\text{1 autre boule}} + \underbrace{B_5^2}_{\text{2 boules bleues}} \cdot \underbrace{B_7^1}_{\text{1 autre boule}} + \underbrace{B_4^2}_{\text{2 boules jaunes}} \cdot \underbrace{B_8^1}_{\text{1 autre boule}} \right) \quad (3p)$$

$$= 3 \cdot (3^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 8) = 1152.$$

$$P(F) = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Question 7
(6p)

 a. Nombre de mains possibles = $C_{32}^{10} = 64\,512\,240$. (Tirage simultané sans remise) **(1p)**

 b. Nombre de mains qui contiennent les quatre valets = $\underbrace{C_4^4}_{\text{4 valets}} \cdot \underbrace{C_{28}^6}_{\text{6 autres cartes}} = 376\,740$. **(1p)**

 c. Nombre de mains qui ne contiennent que des cartes noires = $C_{16}^{10} = 8\,008$. **(1p)**

 d. Nombre de mains qui contiennent exactement trois carreaux et deux dames **(3p)**

$$= \underbrace{C_7^3}_{\text{carreaux sans dames}} \cdot \underbrace{C_3^2}_{\text{dames sans carreaux}} \cdot \underbrace{C_{21}^5}_{\text{autres cartes}} \cdot \underbrace{C_1^0}_{\text{dame de carreau}}$$

$$+ \underbrace{C_1^1}_{\text{dame de carreau}} \cdot \underbrace{C_7^2}_{\text{carreaux sans dames}} \cdot \underbrace{C_3^1}_{\text{dames sans carreaux}} \cdot \underbrace{C_{21}^6}_{\text{autres cartes}}$$

$$= 5\,555\,277.$$