



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CC	Date de l'épreuve :	02.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

Question 1

[11 points]

$$P(z) = z^3 + (-1 + 6i)z^2 + 5(1 + i)z + 50(-1 + i)$$

Soit bi la racine imaginaire pure de P , $b \in \mathbb{R}$.

[0.5]

$$\begin{aligned} P(bi) = 0 &\iff (bi)^3 + (-1 + 6i)(bi)^2 + 5(1 + i)bi + 50(-1 + i) = 0 \\ &\iff -b^3i - (-1 + 6i)b^2 + 5bi - 5b - 50 + 50i = 0 \\ &\iff -b^3i + b^2 - 6b^2i + 5bi - 5b - 50 + 50i = 0 \\ &\iff (b^2 - 5b - 50) + (-b^3 - 6b^2 + 5b + 50)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} b^2 - 5b - 50 = 0 & (1) \\ -b^3 - 6b^2 + 5b + 50 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

[1]

Réolvons (1) : $b^2 - 5b - 50 = 0$ $\Delta = 25 + 200 = 225$

$$b = \frac{5 \pm 15}{2} \iff b = 10 \text{ ou } b = -5$$

[1]

$b = -5$ est aussi solution de (2), car $-(-5)^3 - 6 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5) + 50 = 0$.

$b = 10$ n'est pas solution de (2), car $-10^3 - 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 50 = -1500 \neq 0$.

$z = -5i$ est donc la racine imaginaire pure de P .

[1]

Schéma de Horner :

	1	-1 + 6i	5 + 5i	-50 + 50i
-5i		-5i	5 + 5i	50 - 50i
	1	-1 + i	10 + 10i	0

$$P(z) = (z + 5i) \underbrace{(z^2 + (-1 + i)z + 10 + 10i)}_{Q(z)}$$

[2]

Posons $Q(z) = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1 + i)^2 - 4 \cdot (10 + 10i) \\ &= 1 - 2i - 1 - 40 - 40i \\ &= -40 - 42i \end{aligned}$$

[1]

Soit $a + bi$ une r.c.c. de Δ , $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a + bi)^2 = -40 - 42i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -40 & (1) \\ 2ab = -42 & (2) \end{cases}$$

D'autre part : $a^2 + b^2 = \sqrt{(-40)^2 + (-42)^2} \iff a^2 + b^2 = 58 \quad (3)$

(1) + (3) : $2a^2 = 18 \iff a = \pm 3$

(3) - (1) : $2b^2 = 98 \iff b = \pm 7$

De (2) on conclut que a et b sont de signes contraires.

Les r.c.c. de Δ sont donc $3 - 7i$ et $-3 + 7i$.

[3]

Les racines de Q sont :

$z_1 = \frac{1 - i + (3 - 7i)}{2} = 2 - 4i$ et $z_2 = \frac{1 - i - (3 - 7i)}{2} = -1 + 3i$.

[1]

$S = \{-5i; 2 - 4i; -1 + 3i\}$

[0.5]

Question 2 (au choix)

[5+1+2+3=11 points]

1) $z_1 = \frac{(3 - 2i)\sqrt{3} - (6 + 9i)}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i}$

$= \frac{(3 - 2i)\sqrt{3} - (6 + 9i)}{\sqrt{3}(3 - 2i)}$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}(6 + 9i)}{3(3 - 2i)}$

$= 1 - \frac{3\sqrt{3}(2 + 3i)}{3(3 - 2i)}$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}(2 + 3i)(3 + 2i)}{9 + 4}$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}(6 + 4i + 9i - 6)}{13}$

$= 1 - \frac{13\sqrt{3}i}{13}$

$= 1 - \sqrt{3}i$ forme algébrique de z_1

[4]

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ forme trigonométrique de z_1

[1]

2) $z_2 = 2 + 2i$

$= 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ forme trigonométrique de z_2

[1]

$$\begin{aligned}
3) \quad Z &= \frac{(z_1)^6}{(z_2)^2} \\
&= \frac{[2 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{3})]^6}{[2\sqrt{2} \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})]^2} \\
&= \frac{2^6 \operatorname{cis}(-\frac{6\pi}{3})}{4 \cdot 2 \operatorname{cis}(\frac{2\pi}{4})} \\
&= 2^3 \operatorname{cis}(-2\pi - \frac{\pi}{2}) \\
&= 8 \operatorname{cis}(-\frac{5\pi}{2}) \\
&= 8 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{2}) \\
&= -8i
\end{aligned}$$

Z est donc un nombre imaginaire pur.

[2]

$$4) \quad -8i = 8 \cdot (-i) = 8 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{2})$$

Soit $r \operatorname{cis} \varphi$ une racine cubique complexe de $(-8i)$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&(r \operatorname{cis} \varphi)^3 = 8 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{2}) \\
\iff &r^3 \operatorname{cis} 3\varphi = 8 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{2}) \\
\iff &\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\iff &\begin{cases} r = 2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Les racines cubiques complexes de $(-8i)$ sont données par

$$y_k = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{avec } k \in \{0; 1; 2\}.$$

Ce sont :

$$y_0 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

[3]

Question 3 (au choix)

[5+(2+1+3)=11 points]

1) $z^4 + 72 + 72\sqrt{3}i = 0 \iff z^4 = -72 - 72\sqrt{3}i$, donc z est une racine quatrième complexe de $-72 - 72\sqrt{3}i$.

$$-72 - 72\sqrt{3}i = 144 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 144 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right). \quad [1]$$

Soit $r \operatorname{cis} \alpha$ une racine quatrième complexe de $144 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (r \operatorname{cis} \alpha)^4 &= 144 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ \iff r^4 \operatorname{cis} 4\alpha &= 144 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ \iff \begin{cases} r^4 = 144 \\ 4\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} r = 4\sqrt{3} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines quatrième complexes de $144 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ sont données par :

$$z_k = 4\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; 3\}. \quad [2]$$

Ce sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= 4\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 6i \\ z_1 &= 4\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -6 + 2\sqrt{3}i \\ z_2 &= 4\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} - 6i \\ z_3 &= 4\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 6 - 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$S = \{z_0; z_1; z_2; z_3\}. \quad [2]$$

2) $z = \sqrt{3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}} - \sqrt{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}} i$.

$$\begin{aligned} Z &= z^2 \\ &= \left(\sqrt{3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}} - \sqrt{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}} i\right)^2 \\ &= 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2i\sqrt{3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}} - 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ &= -3\sqrt{2} - 2i\sqrt{9 - \frac{9}{4} \cdot 2} \\ &= -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

[2]

$$3) Z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 6 \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right). \quad [1]$$

4) $Z = z^2$, donc z est une r.c.c. de Z .

Posons $z = r \operatorname{cis} \alpha$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(r \operatorname{cis} \alpha)^2 = 6 \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\iff r^2 \operatorname{cis} 2\alpha = 6 \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt{6} \\ 2\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt{6} \\ \alpha = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les r.c.c. de Z sont donc : $z_1 = \sqrt{6} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{8} \right)$ et $z_2 = \sqrt{6} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{8} \right)$.

Comme $\operatorname{Re}(z) > 0$ et $\operatorname{Im}(z) < 0$, on déduit : $z = \sqrt{6} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{6} \cos \left(-\frac{3\pi}{8} \right) + i\sqrt{6} \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right)$.

En identifiant les parties imaginaires, on conclut :

$$\sqrt{6} \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\sqrt{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

$$\iff \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\frac{\sqrt{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}$$

$$\iff \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\sqrt{\frac{3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}}{6}}$$

$$\iff \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

$$\iff \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

[3]

Question 4

[4+4=8 points]

$$(S) \begin{cases} (m-1)x + 2y + z = 3 \\ mx + y + 2z = m+1 \\ 2x + (m-1)y + z = m \end{cases}$$

1) Soit M la matrice associée au système.

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 2 \\ 2 & m-1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1)[1 - 2(m-1)] - m[2 - (m-1)] + 2(4-1) \\ &= (m-1)(3-2m) - m(-m+3) + 6 \\ &= 3m - 2m^2 - 3 + 2m + m^2 - 3m + 6 \\ &= -m^2 + 2m + 3 \end{aligned}$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

$$\det(M) = 0 \iff -m^2 + 2m + 3 = 0 \iff m = -1 \vee m = 3.$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

[4]

2) Si $m = 3$, alors le système devient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x + 2(-3x - 2z + 4) + z = 0 \\ y = -3x - 2z + 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -4x - 3z = -5 \\ y = -3x - 2z + 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} z = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = -3x - 2\left(-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right) + 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} z = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $x = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$S = \left\{ \left(\alpha; -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\alpha + \frac{5}{3} \right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \{(-3\beta + 2; \beta; 4\beta - 1) / \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}\gamma + \frac{5}{4}; \frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}; \gamma \right) / \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace dont deux sont confondus et coupent

le troisième suivant la droite d passant par le point $A\left(0; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. [4]

Question 5

[1+3+3+3=10 points]

 1) A, B et C ne sont pas alignés ssi les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.

$$\begin{aligned}
 A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

 impossible, donc A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

[1]

 2) $M(x; y; z) \in \pi \iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont coplanaires

$$\iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y+3 & 4 & 2 \\ z-4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x-1) \cdot (-4+6) - (y+3) \cdot (3+3) + (z-4) \cdot (-6-4) = 0$$

$$\iff 2(x-1) - 6(y+3) - 10(z-4) = 0$$

$$\iff 2x - 6y - 10z + 20 = 0$$

$$\iff x - 3y - 5z + 10 = 0$$

 équation cartésienne du plan π

[3]

 3) d est perpendiculaire à π ssi le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, normal à π , est un vecteur directeur de d .

 $M(x; y; z) \in d \iff \overrightarrow{DM}$ et \vec{n} sont colinéaires

$$\iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{DM} = k \cdot \vec{n}$$

$$\iff \frac{x-1}{1} = \frac{y+8}{-3} = \frac{z+7}{-5}$$

$$\iff \begin{cases} -3(x-1) = y+8 \\ -5(x-1) = z+7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ 5x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

 système d'équations cartésiennes de d

[3]

 4) Soit I le point de percée de d dans π .

$$I(x; y; z) \in d \cap \pi \iff \begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ 5x + z + 2 = 0 \\ x - 3y - 5z + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -3x - 5 & (1) \\ z = -5x - 2 & (2) \\ x - 3y - 5z + 10 = 0 & (3) \end{cases}$$

Remplaçons (1) et (2) dans (3) :

$$\begin{aligned} x - 3(-3x - 5) - 5(-5x - 2) + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 9x + 15 + 25x + 10 + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \end{aligned}$$

Dans (1) : $y = -3 \cdot (-1) - 5 \Leftrightarrow y = -2$

Dans (2) : $z = -5 \cdot (-1) - 2 \Leftrightarrow z = 3$

La droite d perce le plan π au point $I(-1; -2; 3)$.

[3]

Question 6

[2+3+3=8 points]

On tire sans ordre 5 cartes parmi 32.

1) On tire 2 coeurs parmi 8 et 3 cartes parmi les $32 - 8 = 24$ autres cartes.

$$C_8^2 \cdot C_{24}^3 = 56\,672.$$

Il y a 56 672 mains contenant exactement 2 coeurs.

[2]

2) Il faut distinguer 2 cas :

- si l'on tire la dame de coeur, on tire encore :

- 1 coeur parmi 7 (sans la dame de coeur)

- 1 dame parmi 3 (sans la dame de coeur)

- 2 cartes parmi les $32 - 7 - 3 - 1 = 21$ cartes ni dame ni coeur.

- si l'on ne tire pas la dame de coeur, on tire :

- 2 coeurs parmi 7 (sans la dame de coeur)

- 2 dames parmi 3 (sans la dame de coeur)

- 1 carte parmi les 21 cartes ni dame ni coeur.

$$1 \cdot C_7^1 \cdot C_3^1 \cdot C_{21}^2 + C_7^2 \cdot C_3^2 \cdot C_{21}^1 = 4410 + 1323 = 5733$$

Il y a 5733 mains contenant exactement deux coeurs et deux dames.

[3]

3) On choisit une couleur parmi 4, puis 2 cartes parmi 8 de cette couleur, une autre couleur parmi 3 et puis 3 cartes parmi 8 de cette couleur.

$$C_4^1 \cdot C_8^2 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 = 18\,816$$

Il y a 18 816 mains contenant deux cartes d'une couleur et trois cartes d'une même autre couleur.

[3]

Question 7

[1+4=5 points]

1) Le taux de positivité étant de 12 %, il y a 120 tests positifs sur les 1000 tests analysés.

Par conséquent, il y a $1000 - 120 = 880$ tests négatifs dans cet échantillon.

[1]

2) On tire simultanément, donc sans ordre, 5 tests parmi 1000, donc il y a C_{1000}^5 cas possibles,

(a) Événement A : les 5 tests sont négatifs.

On tire les 5 tests parmi les 880 tests négatifs; il y a C_{880}^5 cas favorables.

$$P(A) = \frac{C_{880}^5}{C_{1000}^5} \approx 0,527 \quad (52,7\%)$$

[2]

8/9

(b) Événement B : deux tests au moins sont positifs.

Événement contraire \bar{B} : aucun test n'est positif (événement A) ou exactement 1 test est positif.

Dans le deuxième cas, on tire 1 test parmi les 120 tests positifs et 4 tests parmi les 880 tests négatifs; il y a alors $C_{120}^1 \cdot C_{880}^4$ cas favorables.

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - \frac{C_{880}^5 + C_{120}^1 \cdot C_{880}^4}{C_{1000}^5} \\ &\approx 0,112 \quad (11,2\%) \end{aligned}$$

[2]

Question 8

[2+2+3=7 points]

On effectue des tirages avec ordre et sans remise de 3 boules parmi 12, donc il y a A_{12}^3 cas possibles.

1) Événement A : on tire 3 boules rouges parmi 5 ou 3 boules vertes parmi 7.

Nombre de cas favorables : $A_5^3 + A_7^3$

$$P(A) = \frac{A_5^3 + A_7^3}{A_{12}^3} = \frac{9}{44} \approx 0,205 \quad (20,5\%) \quad [2]$$

2) Événement B : une boule au moins est verte.

Événement contraire \bar{B} : aucune boule n'est verte, donc on tire 3 boules parmi les 5 boules rouges; il y a A_5^3 cas favorables.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{21}{22} \approx 0,955 \quad (95,5\%) \quad [2]$$

3) Événement C : exactement une boule tirée est verte.

On tire sans ordre 2 boules rouges parmi 5 et 1 boule verte parmi 7, puis on permute ces 3 boules, donc il y a $C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot 3!$ cas favorables.

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot 3!}{A_{12}^3} = \frac{7}{22} \approx 0,318 \quad (31,8\%) \quad [3]$$

Alternative :

On tire avec ordre 2 boules rouges parmi 5 et 1 boule verte parmi 7, puis on choisit la place de la boule verte parmi les 3 boules ...