LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 1	**C**	*Durée de l'épreuve :* 2h05 *Date de l'épreuve :* 09 juin 2020

Numéro d'ordre du candidat :______________

Instructions :

- L'élève répond à **toutes** les questions de la **partie 1**
- L'élève répond à **exactement 2 questions** de la **partie 2**. Il indique ses choix en cochant les cases appropriées ci-dessous

Seules les réponses correspondant aux questions choisies par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix clairement renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie 1 (obligatoire)

Exercice I : **Nombres complexes** 30 points

Partie 2 (exactement 2 exercices au choix)

☐ Exercice II : **Nombres complexes** 15 points

☐ Exercice III : **Géométrie analytique dans l'espace** 15 points

☐ Exercice IV : **Systèmes linéaires** 15 points

☐ Exercice V : **Calculs de probabilités** 15 points

☐ Exercice VI : **Combinatoire** 15 points

Partie 1 (obligatoire)

I. Nombres complexes.

1) Soit le polynôme

$$P(z) = i \cdot z^3 - (3+i) \cdot z^2 - (5-2i) \cdot z - 8 - 14i \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Résoudre $P(z) = 0$ sachant que P admet une racine imaginaire pure.

2) Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{10\sqrt{3} + 6i}{\sqrt{3} + 2i} - \frac{14 + 14\sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i}$$

a) Écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Déterminer les racines quatrièmes complexes de Z sous forme trigonométrique.

3) Calculer et donner le résultat sous forme algébrique et sous forme trigonométrique:

$$Z = \frac{(1+i)^{2020}}{1 + i^{2020}}$$

4) Calculer et donner le résultat sous forme trigonométrique et sous forme algébrique:

$$Z = \frac{\left(2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5}{\left(2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^5}$$

12+(6+4)+4+4=30 points

Partie 2 (exactement 2 exercices au choix)

II. Nombres complexes.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et écrire l'ensemble des solutions:

$$(1-i)\cdot\overline{z} = (2+i)\cdot z + 3$$

2) Soit les nombres complexes $\quad z_1 = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{\sqrt{3}-i} \quad$ et $\quad z_2 = \sqrt{2}\cdot cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   a) Écrire z_1 sous forme trigonométrique.

   b) Soit $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Écrire Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

   c) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

5+10=15 points

III. Géométrie analytique de l'espace.

Dans un repère orthonormé de l'espace on donne les points
$A\,(2;-1;0)\,;B\,(1;0;-2)\,;C\,(0;2;1)\,;D\,(-3;-2;2)$ et le plan $\alpha \equiv 4x+3y+z=3$.

1) Vérifier que les points $A; B$ et C ne sont pas alignés.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan Π passant par $A; B$ et C.
3) Est-ce que $D \in \Pi$?
4) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d passant par D et qui est orthogonale au plan α.
5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan Π.
6) Soit les plans $\pi_1 \equiv 3x+2y+z=4$ et $\pi_2 \equiv x+2y-z=0$.
   Déterminer $\pi_1 \cap \pi_2$. Donner les éléments caractéristiques de cette intersection.

(1+2+1+2+4+5)=15 points

IV. Systèmes linéaires.

Soit le système paramétré suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+a\cdot z &=& 0 \\ x+a\cdot y+z &=& 2\cdot a \\ (a+1)\cdot x+a\cdot y+z &=& a \end{array}\right. \qquad \text{avec } a\in\mathbb{R}$$

1) Déterminer a pour que le système admette une solution unique.
2) Résoudre et interpréter géométriquement le système pour $a=0$ et $a=1$.
3) Résoudre et interpréter géométriquement le système pour $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1;1\}$

15 points

V. Probabilités.

Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

1) On tire 3 boules successivement sans remise de l'urne.
   Calculer la probabilité d'obtenir:
   a) Aucune boule noire.
   b) Une boule de chaque couleur.
   c) 3 boules de même couleur.
   d) Exactement 2 boules rouges.

2) On tire 3 boules successivement avec remise de l'urne.
   Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur.

(3+3+3+3)+3=15 points

VI. Combinatoire.

Un entraîneur d'une équipe de handball a 16 joueurs à sa disposition dont 3 gardiens de but et 13 joueurs de champ (Feldspieler). Parmi les gardiens il y a un étranger et parmi les joueurs de champ il y a 4 étrangers, les autres joueurs sont des luxembourgeois. Pour former une équipe il faut choisir un gardien et 6 joueurs de champ.

1) Combien d'équipes peut-on former?
2) Combien d'équipes peut-on former contenant uniquement des luxembourgeois?
3) Combien d'équipes peut-on former contenant exactement 3 étrangers?
4) Combien d'équipes peut-on former si le gardien Misch ne veut jouer ni avec le joueur de champ Jang, ni avec le joueur de champ Pit?
5) De combien de manières peut-on distribuer des tricots numérotés de 1 à 16 aux 16 joueurs sachant que les trois premiers tricots sont réservés pour les gardiens?

(2+2+4+4+3)=15 points