EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES 2017
MATHEMATIQUES I
SECTION C

Corrigé

Question I ((2 + 10) + (4 + 2) = 18 points)

1) $p(z)=2z^3-(7-4i)z^2+(13-25i)z+12+21i$

a) Montrons que $p(-3i)=0$. $\boxed{2\ pts}$

$p(-3i)=2(-27)(-i)-(7-4i)(-9)+(13-25i)(-3i)+12+21i$
$=54i+63-36i-39i-75+12+21i$
$=0$

b) Comme $-3i$ est une racine de $p(z)$, $p(z)$ est divisible par $z+3i$. $\boxed{2\ pts}$

Schéma de Horner :

	2	$-7+4i$	$13-25i$	$12+21i$
$-3i$		$-6i$	$-6+21i$	$-12-21i$
	2	$-7-2i$	$7-4i$	0

Donc $p(z)=(z+3i)\underbrace{\left[2z^2-(7+2i)z+7-4i\right]}_{q(z)}$.

Racines de $q(z)$: $\boxed{3\ pts}$

$\Delta=(7+2i)^2-8(7-4i)=49+28i-4-56+32i=-11+60i$

Racines carrées complexes de Δ :

$\delta=a+bi$ est une r.c.c. de $\Delta \Leftrightarrow (a+bi)^2=-11+60i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-11 & (1) \\ 2ab=60 & (2) \\ a^2+b^2=\sqrt{3721}=61 & (3) \end{cases}$$

$(3)+(1)$: $2a^2=50 \Leftrightarrow a^2=25 \Leftrightarrow a=5$ ou $a=-5$ $\boxed{3\ pts}$

$(3)-(1)$: $2b^2=72 \Leftrightarrow b^2=36 \Leftrightarrow b=6$ ou $b=-6$

Comme d'après (2) a et b sont de même signe, les r.c.c. de Δ sont $\delta_1=5+6i$ et $\delta_2=-5-6i$.

Racines de $q(z)$: $z_1=\dfrac{7+2i+5+6i}{4}=3+2i$ $\boxed{2\ pts}$

$z_2=\dfrac{7+2i-5-6i}{4}=\dfrac{1}{2}-i$

Ensemble de solutions de l'équation $p(z)=0$: $S=\left\{-3i, 3+2i, \dfrac{1}{2}-i\right\}$

2) $z=(2-3i)^2-\dfrac{17(3+i)}{i-4}+\dfrac{3+2i}{i}$

a) Forme algébrique : $\boxed{2{,}5\text{ pts}}$

$$z=(2-3i)^2-\frac{17(3+i)}{i-4}+\frac{3+2i}{i}=4-12i-9-\frac{17(3+i)(i+4)}{(i-4)(i+4)}+\frac{(3+2i)i}{i^2}$$
$$=-5-12i-\frac{17(3i+12-1+4i)}{-1-16}-3i+2$$
$$=-3-15i+7i+11$$
$$=8-8i$$

Forme trigonométrique : $\boxed{1{,}5\text{ pts}}$

$|z|=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{8}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi&=-\frac{8}{8\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

D'où : $z=8\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Racines cubiques de z : $\boxed{2\text{ pts}}$

$$z_k=\sqrt[3]{8\sqrt{2}}\operatorname{cis}\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k\in\{0;1;2\})$$

D'où : $z_0=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$z_1=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$$
$$z_2=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{15\pi}{12}=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$$

Question II ((3 + 9) + (4 + 4 + 2) = 22 points)

1) $\begin{cases}mx-y+(m+1)z=0\\(m+2)x-my+3z=1\\2x+z=m\end{cases}\quad(m\in\mathbb{R})$

a) $\Delta=\begin{vmatrix}m&-1&m+1\\m+2&-m&3\\2&0&1\end{vmatrix}=-m^2-6+2m(m+1)+m+2$ $\boxed{3\text{ pts}}$

$$=-m^2-6+2m^2+2m+m+2$$
$$=m^2+3m-4$$

$\Delta=0\Leftrightarrow m^2+3m-4=0\Leftrightarrow m=1$ ou $m=-4$

Le système admet une solution unique $\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

b) Si $m=-4$ le système s'écrit : $\boxed{3{,}5\text{ pts}}$

$$\begin{cases} -4x-y-3z=0 & (1) \\ -2x+4y+3z=1 & (2) \\ 2x+z=-4 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ 4\cdot(1)+(2)\to(2')$$

$$\begin{cases} -4x-y-3z=0 & (1) \\ -18x-9z=1 & (2') \\ 2x+z=-4 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (2')+9\cdot(3)\to(3')$$

$$\begin{cases} -4x-y-3z=0 & (1) \\ -18x-9z=1 & (2') \\ 0=-35 & (3') \end{cases}$$

Système impossible : $S=\varnothing$

<u>Interprétation géométrique</u>

Les équations du système représentent trois plans qui n'ont aucun point commun.

Si $m=1$ le système s'écrit : $\boxed{5{,}5\ pts}$

$$\begin{cases} x-y+2z=0 & (1) \\ 3x-y+3z=1 & (2) \\ 2x+z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (1)-(2)\to(2')$$

$$\begin{cases} x-y+2z=0 & (1) \\ -2x-z=-1 & (2') \\ 2x+z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (2')+(3)\to(3')$$

$$\begin{cases} x-y+2z=0 & (1) \\ -2x-z=-1 & (2') \\ 0=0 & (3') \end{cases}$$

Système simplement indéterminé

Posons $x=\alpha$.

Dans (3) : $z=-2\alpha+1$

Dans (1) : $\alpha-y-4\alpha+2=0 \Leftrightarrow y=-3\alpha+2$

D'où : $S=\{(\alpha;-3\alpha+2;-2\alpha+1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

<u>Interprétation géométrique</u>

Les équations du système représentent trois plans qui se coupent en la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(1;-3;-2)$ et passant par le point $A(0;2;1)$.

2) $A(-2;-6;0)$, $B(1;2;7)$, $C(3;0;-3)$, $P(0;2;-4)$

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan π. $\boxed{4\ pts}$

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{AB}+h\overrightarrow{AC} \quad (k,h\in\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ y-2 & 8 & 6 \\ z+4 & 7 & -3 \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow -24x+35(y-2)+18(z+4)-40(z+4)-42x+9(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow -66x+44(y-2)-22(z+4)=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-2(y-2)+(z+4)=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y+z+8=0$$

b) $M(x;y;z)\in(PC)\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{PC} \quad (k\in\mathbb{R})$ $\boxed{4\ pts}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3k \\ y-2=-2k \\ z+4=k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+12 \\ y-2=-2z-8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3z-12=0 \\ y+2z+6=0 \end{cases}$$

c) Vecteur directeur de la droite (PC) : $\overrightarrow{PC}(3;-2;1)$ $\boxed{2\ pts}$

Vecteur normal au plan (ABC) : $\vec{n}(3;-2;1)$

Comme $\overrightarrow{PC}=\vec{n}$, $(PC)\perp(ABC)$.

<u>Question III</u> (4 + (3 + 2 + 3) + (2 + 2 + 4) = <u>20 points</u>)

1) $$\left(2x^5-\frac{5}{x^3}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\left(2x^5\right)^{10-k}\left(\frac{5}{x^3}\right)^k$$ $\boxed{4\ pts}$
$$=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot x^{50-5k}\cdot 5^k\cdot x^{-3k}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot 5^k\cdot x^{50-8k}$$

Comme $50-8k=18\Leftrightarrow k=4$, le terme en x^{18} est :

$$(-1)^4 C_{10}^4\cdot 2^6\cdot 5^4\cdot x^{18}=210\cdot 64\cdot 625\cdot x^{18}=8400000x^{18}$$

2) Nombre de possibilités pour choisir 3 passagers parmi 20 (tirages sans ordre et sans remise) : $C_{20}^3=1140$ $\boxed{1\ pt}$

a) Soit A l'événement « les 3 passagers ont 3 destinations différentes ».

Alors $p(A)=\dfrac{C_9^1\cdot C_6^1\cdot C_5^1}{1140}=\dfrac{9\cdot 6\cdot 5}{1140}=\dfrac{270}{1140}=\dfrac{9}{38}\simeq 0{,}237$. $\boxed{2\ pts}$

b) Soit B l'événement « les 3 passagers ont la même destination ».

Alors $p(B)=\dfrac{C_9^3+C_6^3+C_5^3}{1140}=\dfrac{84+20+10}{1140}=\dfrac{114}{1140}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$. $\boxed{2\ pts}$

c) Soit C l'événement « au moins un des passagers a un billet pour Mersch ».

Alors $\overline{C}$ est l'événement contraire « aucun passager n'a un billet pour Mersch ».

Et $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\dfrac{C_{15}^3}{1140}=1-\dfrac{455}{1140}=1-\dfrac{91}{228}=\dfrac{137}{228}\simeq 0{,}601$. $\boxed{3\ pts}$

3) Tirages avec ordre et sans remise

a) Nombre de mots ayant quatre lettres distinctes : $A_6^4=360$ $\boxed{2\ pts}$

b) Nombre de mots ayant quatre lettres distinctes et commençant par une consonne : $4\cdot A_5^3=4\cdot 60=240$ $\boxed{2\ pts}$

c) Nombre de mots comportant une seule fois la lettre A :

$$\underbrace{C_4^1\cdot A_5^3}_{\text{mots avec 4 lettres distinctes}}+\underbrace{C_4^1\cdot C_3^2\cdot A_4^1}_{\text{mots avec 2 S}}=4\cdot 60+4\cdot 3\cdot 4=240+48=288$$ $\boxed{4\ pts}$