Corrigé

I) 1) $z = \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1+(-3+\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)i+3+\sqrt{3}}{1+3} = \dfrac{2\sqrt{3}+2+(2\sqrt{3}-2)i}{4}$

$z = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} i$

2) $z_1 = 1+i \quad |z_1| = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} (2\pi)$

$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{3}+i \quad |z_2| = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} (2\pi)$

$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

$z_3 = 1+i\sqrt{3} \quad |z_3| = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} (2\pi)$

$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

$z = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \cdot 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}}{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}$

3) racines cubiques de z : $z_k = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0,1,2\}$

$z_0 = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{36}$, $\quad z_1 = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{36}+\frac{24\pi}{36}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{25\pi}{36}$,

$z_2 = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{36}+\frac{48\pi}{36}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{49\pi}{36}$

II) $P(z) = 2z^3+3z^2+(12+7i)z+26-8i$

$P(bi) = -2b^3 i - 3b^2 + 12bi - 7b + 26 - 8i = -3b^2-7b+26+(-2b^3+12b-8)i$

$P(bi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3b^2-7b+26 = 0 & (1) \\ -2b^3+12b-8 = 0 & (2) \end{cases}$ (1) : $\Delta = 49+312 = 361$

$b_i = \dfrac{7 \pm 19}{-6} \nearrow -\frac{13}{3}$; $\searrow 2$

$\underline{b=2}$ dans (2) : $-16+24-8 = 0$

$\Rightarrow 2i$ est une racine de P.

	2	3	$12+7i$	$26-8i$
$2i$		$4i$	$-8+6i$	$-26+8i$
	2	$3+4i$	$4+13i$	0

$P(z) = (z-2i)\left[2z^2+(3+4i)z+4+13i\right]$

$\Delta = (3+4i)^2 - 8(4+13i) = 9+24i-16-32-104i = -39-80i$

pos : $t = a+bi$ racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow (a+bi)^2 = -39-80i$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = -39-80i$

$\begin{cases} a^2+b^2 = 89 & (1) \\ a^2-b^2 = -39 & (2) \\ ab < 0 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $2a^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = \pm 5$

$(1)-(2)$: $2b^2 = 128 \Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8$

D'après (3) : $t_1 = 5-8i \qquad t_2 = -5+8i$

$z_1 = \dfrac{-3-4i+5-8i}{4} = \dfrac{2-12i}{4} = \frac{1}{2}-3i \qquad z_2 = \dfrac{-3-4i-5+8i}{4} = \dfrac{-8+4i}{4} = -2+i$

$S = \left\{2i \,;\, \frac{1}{2}-3i \,;\, -2+i\right\}$

III) 1) $M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)+z-4(y-1)-2z-2(x-2)+(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)-3(y-1)-z=0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x-2+3y-3+z=0$$

$$\Leftrightarrow x+3y+z-5=0 \quad \text{éq. cart. de } \pi$$

2) $\vec{u}$ = vect. normal à π = vect. dir. de d $\quad \vec{u}(1,3,1)$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-2) = y-1 \\ x-2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ x-z-2=0 \end{cases} \quad \text{syst. d'éq. cart. de } d$$

3) éq. cart. de π' : $x+3y+z+d=0$

$D(3,-4,-8) \in \pi' \Leftrightarrow 3-12-8+d=0 \Leftrightarrow d=17$

éq. cart. de π' : $x+3y+z+17=0$

IV) 1) $\begin{cases} 2x+my+4z=2m \\ x+(m-1)y+mz=m \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6(m-1)+m^2+4-4(m-1)-2m-3m$$
$$= 6m-6+m^2+4-4m+4-2m-3m$$
$$= m^2-3m+2$$
$$\Delta = 9-8 = 1 \qquad m_i = \frac{3\pm 1}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{smallmatrix}$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=2$

Le système admet une solution unique si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$.

2) • $\underline{m = 1}$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 & (1) \\ x + z = 1 & (2) \\ x + y + 3z = 2 & (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \quad x = 1 - z$

Dans (1) : $2 - 2z + y + 4z = 2$

$y + 2z = 0$

Dans (3) : $1 - z + y + 3z = 2$

$y + 2z = 1$

impossible

$S = \emptyset$

Les 3 plans n'ont pas de point commun.

• $\underline{m = 2}$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4 \quad | : 2 & (P_1) \\ x + y + 2z = 2 & (P_2) \\ x + y + 3z = 2 & (P_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} = \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 & (1) \\ x + y + 3z = 2 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) : \quad z = 0$

Dans (1) : $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \qquad$ pos : $y = \lambda$

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$S = \{ (2 - \lambda, \lambda, 0) \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

Les 3 plans se coupent suivant une droite passant par le point $A(2,0,0)$ et de vect. dir. $\vec{u}(-1,1,0)$. P_1 et P_2 sont confondus.

V) 1) $$\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \, (2x^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{4x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k \, 2^{8-k} x^{16-2k} (-1)^k \, 2^{-2k} x^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k \, 2^{8-3k} (-1)^k x^{16-3k}$$

$\underline{\text{Cond}}$: $16 - 3k = 7 \Leftrightarrow -3k = -9 \Leftrightarrow k = 3$

terme en x^7 : $C_8^3 \, 2^{-1} \cdot (-1)^3 x^7 = -\frac{56}{2} x^7 = -28 x^7$

2) nombre de cas possibles $= C_{32}^5 = 201'376$

a) A = obtenir exactement 2 carreaux et exactement 2 cœurs.

nombre de cas favorables $= C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot C_{16}^1 = 28 \cdot 28 \cdot 16 = 12544$

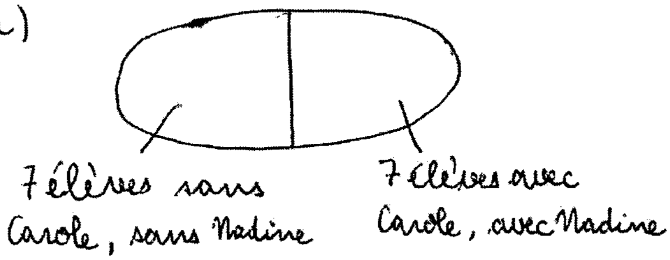
$p(A) = \frac{12544}{201'376} = \frac{56}{899} \simeq 0{,}062$

b) B = obtenir au moins un roi ou au moins un coeur

$\overline{B}$ = n'obtenir ni roi, ni coeur

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{C_{21}^{5}}{C_{32}^{5}} = 1 - \frac{20349}{201'376} = 1 - \frac{2907}{28768} = \frac{25861}{28768} \simeq 0,899$$

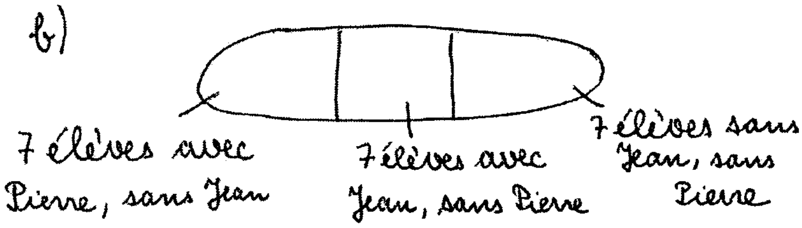
3) a)



nombre de groupes

$$= C_{14}^{7} + C_{14}^{5} = 3432 + 2002$$
$$= 5434$$

b)



nombre de groupes

$$= C_{14}^{6} + C_{14}^{6} + C_{14}^{7}$$
$$= 3003 + 3003 + 3432 = 9438$$

<u>ou</u>: $C_{16}^{7} - C_{14}^{5} = 11440 - 2002$
$$= 9438$$

4) nombre de mots $= C_{21}^{3} \cdot C_{5}^{2} \cdot 5! = 1330 \cdot 10 \cdot 120 = 1'596'000$

<u>ou</u>: $C_{5}^{3} \cdot A_{21}^{3} \cdot A_{5}^{2} = 10 \cdot 7980 \cdot 20 = 1'596'000$