Examen de fin d'études secondaires 2014 **Section : C** **Branche : Mathématiques I**

Corrigé

Question I (12+8 = 20 points)

1) $P(z) = -iz^3 + (1+i)z^2 - (5+4i)z - 4(8+i)$

a) $P(-4i) = -i(-4i)^3 + (1+i)(-4i)^2 - (5+4i)(-4i) - 4(8+i)$
$= 64 + (1+i)(-16) + 20i - 16 - 32 - 4i$
$= 16 - 16 - 16i + 16i = 0$

donc $-4i$ est une racine de P.

b) Schéma de Horner

	$-i$	$1+i$	$-5-4i$	$-32-4i$
$-4i$		-4	$4+12i$	$32+4i$
	$-i$	$-3+i$	$-1+8i$	0

D'où $P(z) = (z+4i)[-iz^2 - (3-i)z - (1-8i)]$

Résolvons $-iz^2 - (3-i)z - (1-8i) = 0$

$\Delta = (3-i)^2 - 4i(1-8i) = 9 - 6i - 1 - 4i - 32 = -24 - 10i$

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. $a + bi$ est une racine carrée de $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 & (1) \\ 2ab = -10 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 & (3) \end{cases}$

$(1) + (3): 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

$(3) - (1): 2b^2 = 50 \Leftrightarrow b = 5$ ou $b = -5$

De (2) : a et b sont de signes contraires.

Donc les racines carrées de Δ sont $1 - 5i$ et $-1 + 5i$.

D'où $z_1 = \frac{3-i+1-5i}{-2i} = \frac{4-6i}{-2i} = 3 + 2i$ et $z_2 = \frac{3-i-1+5i}{-2i} = \frac{2+4i}{-2i} = -2 + i$

Ainsi $\boxed{P(z) = -i(z+4i)(z-3-2i)(z+2-i)}$.

2) $z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i \Leftrightarrow z$ est une racine quatrième de $t = 8 - 8\sqrt{3}i$

$t = 8 - 8\sqrt{3}i \quad r = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = 16 \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$t = 16 \operatorname{cis}\frac{-\pi}{3} \qquad \sqrt[4]{r} = \sqrt[4]{16} = 2$

Les racines quatrièmes de t sont $\boxed{t_k = \sqrt[4]{r} \operatorname{cis}\frac{\alpha}{4} = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right) \text{ où } k \in \{0;1;2;3\}}$:

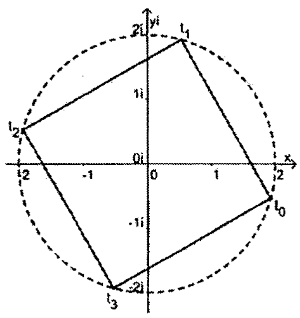
$t_0 = 2 \operatorname{cis}\frac{-\pi}{12} = 2 \operatorname{cis}(-15°)$,

$t_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{12} = 2 \operatorname{cis} 75°$,

$t_2 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12} + \pi\right) = 2 \operatorname{cis}\frac{11\pi}{12} = 2 \operatorname{cis} 165°$ et

$t_3 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{cis}\frac{17\pi}{12} = 2 \operatorname{cis}\frac{-7\pi}{12} = 2 \operatorname{cis}(-105°)$.

$\boxed{S = \left\{2 \operatorname{cis}\frac{-7\pi}{12}, 2 \operatorname{cis}\frac{-\pi}{12}, 2 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{12}, 2 \operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}\right\}}$



Question II (13 points)

1) Le système admet une solution unique dans $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + 0 + 2 + m - 2m - 0 \neq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{m \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}}$

2a) Si $m = -2$, alors le système devient $\begin{cases} -2x \quad + z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ impossible $\boxed{S = \emptyset}$

Les équations du système sont, dans l'espace, celles de trois plans n'ayant aucun point commun, les deux derniers étant strictement parallèles.

2b) Si $m = 0$, alors le système devient $\begin{cases} z = 0 \\ x \quad + z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\boxed{S = \{(-1; \tfrac{3}{2}; 0)\}}$

Les équations du système sont, dans l'espace, celles de trois plans se coupant au point $\left(-1; \frac{3}{2}; 0\right)$.

2c) Si $m = 1$, alors le système devient

$\begin{cases} x \quad + z = 0 & (1) \\ x - y + z = -1 & (2) \\ x + 2y + z = 2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & (1) \\ y = 1 & (1) - (2) \\ 3y = 3 & (3) - (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 1 \end{cases}$ $\boxed{S = \{(x; 1; -x) | x \in \mathbb{R}\}}$

Les équations du système sont, dans l'espace, celles de trois plans

se coupant suivant la droite passant par le point $(0; 1; 0)$ et de vecteur directeur $(1; 0; -1)$.

Question III (7 points)

1) $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = 2k + 2 & (1) \\ y = -3k & (2) \\ z = 2k - 3 & (3) \end{cases} \equiv \begin{cases} x - z = 5 & (1) - (3) = (4) \\ 3x + 2y = 6 & 3 \cdot (1) + 2 \cdot (2) = (5) \end{cases}$

2) $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = k + 5 & (6) \\ y = 2k - 1 & (7) \\ z = -3k + 4 & (8) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} (6), (7) \text{ et } (8) \text{ dans } (4): \ k + 5 + 3k - 4 = 5 \Leftrightarrow k = 1 \\ (6), (7) \text{ et } (8) \text{ dans } (5): \ 3k + 15 + 4k - 2 = 6 \Leftrightarrow k = -1 \end{array}\right\}$ impossible, donc $\boxed{d \cap \Delta = \emptyset.}$

3) π admet comme vecteur normal un vecteur directeur de Δ : $\pi \equiv x + 2y - 3z + c = 0 \ (c \in \mathbb{R})$.

$A(2; 0; -3) \in \pi \Leftrightarrow 2 + 0 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = -11$ donc $\boxed{\pi \equiv x + 2y - 3z - 11 = 0}$.

Question IV **(4+10+6 = 20 points)**

1) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k\, C_{10}^k\, (3x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{2x}\right)^k$

le degré est 11 $\Leftrightarrow 2(10-k) - k = 11 \Leftrightarrow 20 - 3k = 11 \Leftrightarrow k = 3$

Le terme cherché est $(-1)^3\, C_{10}^3\, (3x^2)^7 \left(\frac{1}{2x}\right)^3 = -120 \cdot 3^7 x^{14} \cdot 2^{-3} x^{-3} = \boxed{-32\,805\, x^{11}}$

2) $\Omega = \{\text{mains à 7 cartes}\}$ $\qquad \#\Omega = C_{32}^7 = 3\,365\,856$

a) A : « obtenir exactement un roi et deux dames » $\qquad \#A = C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^4 = 4 \cdot 6 \cdot 10\,626 = 255\,024$

$\boxed{P(A) = \frac{255\,024}{3\,365\,856} = \frac{1\,771}{23\,374} \approx 0{,}076 = 7{,}6\%}$

b) B : « obtenir exactement quatre as » $\qquad \#B = C_4^4 \cdot C_{28}^3 = 1 \cdot 3\,276 = 3\,276$

$\bar{B}$: « obtenir au plus trois as » $\qquad \boxed{P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3\,276}{3\,365\,856} = \frac{7\,185}{7\,192} \approx 0{,}999 = 99{,}9\%}$

c) C : « obtenir aucun pique » $\qquad \#C = C_{24}^7 = 346\,104$

$\bar{C}$: « obtenir au moins un pique » $\qquad \boxed{P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{346\,104}{3\,365\,856} = \frac{41\,941}{46\,748} \approx 0{,}897 = 89{,}7\%}$

3)

a) On tire trois boules successivement avec remise.
Il y a trois boules de même couleur c.-à-d. trois boules soit bleues soit rouges soit vertes
dans $B_{13}^3 + B_{13}^3 + B_6^3 = 2 \cdot 13^3 + 6^3 = 2 \cdot 2\,197 + 216 = \boxed{4\,610 \text{ tirages}}$

b) On tire trois boules successivement sans remise.
Il y a exactement une boule bleue dans les tirages de la forme
(1ère bleue et 2 non-bleues) à la position de la bleue près
c.-à-d. dans $(A_{13}^1 \cdot A_{19}^2) \cdot 3 = (13 \cdot 342) \cdot 3 = \boxed{13\,338 \text{ tirages}}$